Секция 2 «ИНФОРМАЦИОННЫЕ И КОМПЬЮТЕРНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В АГРОПРОМЫШЛЕННОМ КОМПЛЕКСЕ»

УДК 519.86:631.145

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБЪЕКТОВ АПК С ПОМОЩЬЮ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ

Е.Ю. Жушма – 16 пп, 4 курс, АМФ,
Научные руководители:
д-р техн. наук, профессор А.Н. Леонов[1],
канд. техн. наук Ли Цинжэнь[2]
[1]БГАТУ, г. Минск, Республика Беларусь,
[2]Юбиньская профессиональная техническая академия, г. Сычуань, Китайская Народная Республика

В сельском хозяйстве детерминированное моделирование процессов растениеводства и животноводства в значительной степени осложняется непредсказуемыми изменениями природно-климатических условий. Поэтому единственным способом моделирования этих процессов является стохастическое моделирование, представляющее собой обработку экспериментальных данных методами математической статистики. Метод стохастического моделирования заключается в построении уравнения регрессии, отражающего зависимость параметра оптимизации $Y(x)$ от управляющего фактора x в виде полинома Тейлора n-й степени [1]

$$Y(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n, \quad x \in [x_{\min}, x_{\max}] \tag{1}$$

Для исключения отрицательных моментов, связанных с различной размерностью и масштабом факторов x^n в натуральном выражении, моделирование процессов осуществляют в факторах X^n в нормированном выражении

$$X = \frac{x - x_0}{\Delta x}, \quad x_0 = \frac{x_{\min} + x_{\max}}{2}, \quad \Delta x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2}, \quad x = x_0 + X\,\Delta x\,. \tag{2}$$

В дальнейшем при моделировании технологических будем использовать равномерно – симметричный план (РСП), уровни факторов которого в j-ом опыте при общем числе опытов N задаются следующим образом [1]

$$\begin{cases} x_j = x_{\min} + \dfrac{j-1}{N-1} \cdot \left(x_{\max} - x_{\min} \right), \quad x_j \in [x_{\min}, x_{\max}] \\ X_j = \dfrac{2(j-1)}{N-1} - 1, \quad X_j \in [-1, +1] \end{cases} . \qquad (3)$$

Уравнение регрессии для РСП, в котором управляющие факторы выражены в нормированных координатах имеет следующий вид (здесь и в дальнейшем в качестве примера рассмотрим уравнение регрессии 3-го порядка)

$$Y = b_0 X^0 + b_1 X^1 + b_2 X^2 + b_3 X^3, \qquad (4)$$

где b_0, b_1, b_2, b_3 – коэффициенты уравнения регрессии.

В случае, когда $N > k$, где N – число опытов, k – число регрессионных коэффициентов, наибольшее распространение для построения уравнения регрессии (4) получил метод наименьших квадратов (МНК). Суть МНК заключается в том, что наилучшим решением является уравнение регрессии, для которого остаточная сумма квадратов разности расчетных и экспериментальных значений $\varphi(b_0, b_1, b_2, b_3)$ – минимальна

$$\varphi(b_0, b_1, b_2, b_3) = \sum_{j=1}^{N} \left(Y_j^p - \overline{Y}_j \right)^2 = \sum_{j=1}^{N} \left(b_0 X_j^0 + b_1 X_j^1 + b_2 X_j^2 + b_3 X_j^3 - \overline{Y}_j \right)^2 \to \min \qquad (5)$$

Необходимое условие минимума остаточной суммы квадратов $\varphi(b_0, b_1, b_2, b_3)$

$$\partial\varphi / \partial X_k = 0, \quad k = 0, 1, 2, 3 \qquad (6)$$

Нахождение регрессионных коэффициентов связано с решением системы: 4 уравнения – 4 неизвестные, что само по себе является достаточно сложной математической задачей, связанной теорией матриц. Кроме того, недостаток такого метода заключается во взаимной функциональной зависимости регрессионных коэффициентов, что существенно затрудняет физическую интерпретацию полученных результатов, а также в оценке абсолютной погрешности этих коэффициентов.

Для исключения взаимной зависимости управляющих факторов, запишем уравнение регрессии в форме, в которой факторы ортогональны

$$Y(X) = b_0 X_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3 \qquad (7)$$

где $X_0 = \alpha_{00} = 1$; $X_1 = X^1 = X$; $X_2 = X^2 - \alpha_{20}$; $X_3 = X^3 - \alpha_{31} X$. (8)

Условие ортогональности факторов

$$\sum_{j=1}^{N} X_p X_s = 0, \quad p < s; \quad p = 0, 1, 2; \quad s = 1, 2, 3. \qquad (9)$$

После дифференцирования уравнения (7) и преобразования получаем систему уравнений

$$\begin{cases} b_0 \sum_{j=1}^{N} X_{0j}^2 + b_1 \sum_{j=1}^{N} X_{0j} X_{1j} + b_2 \sum_{j=1}^{N} X_{0j} X_{2j} + b_3 \sum_{j=1}^{N} X_{0j} X_{3j} = \sum_{j=1}^{N} X_{0j} \overline{Y}_j \\ b_0 \sum_{j=1}^{N} X_{0j} X_{1j} + b_1 \sum_{j=1}^{N} X_{1j}^2 + b_2 \sum_{j=1}^{N} X_{1j} X_{2j} + b_3 \sum_{j=1}^{N} X_{1j} X_{3j} = \sum_{j=1}^{N} X_{1j} \overline{Y}_j \\ b_0 \sum_{j=1}^{N} X_{0j} X_{2j} + b_1 \sum_{j=1}^{N} X_{1j} X_{2j} + b_2 \sum_{j=1}^{N} X_{2j}^2 + b_3 \sum_{j=1}^{N} X_{2j} X_{3j} = \sum_{j=1}^{N} X_{2j} \overline{Y}_j \\ b_0 \sum_{j=1}^{N} X_{0j} X_{3j} + b_1 \sum_{j=1}^{N} X_{1j} X_{3j} + b_2 \sum_{j=1}^{N} X_{2j} X_{3j} + b_3 \sum_{j=1}^{N} X_{3j}^2 = \sum_{j=1}^{N} X_{3j} \overline{Y}_j \end{cases} . \qquad (10)$$

Для того, чтобы система уравнений (10) приняла диагональный вид, который позволит достаточно просто рассчитать регрессионные коэффициенты b_0, b_1, b_2, b_3 по уравнениям

$$b_0 = \frac{\sum_{j=1}^{N} X_{0j} \overline{Y_j}}{\sum_{j=1}^{N} X_{0j}^2}, \quad b_1 = \frac{\sum_{j=1}^{N} X_j \overline{Y_j}}{\sum_{j=1}^{N} X_j^2}, \quad b_2 = \frac{\sum_{j=1}^{N} (X_j^2 - \lambda_{20}) \overline{Y_j}}{\sum_{j=1}^{N} (X_j^2 - \lambda_{20})^2}, \quad b_3 = \frac{\sum_{j=1}^{N} (X_j^3 - \lambda_{31} X_j) \overline{Y_j}}{\sum_{j=1}^{N} (X_j^3 - \lambda_{31} X_j)^2}, \qquad (11)$$

необходимо так подобрать параметры α_{20}, α_{31}, чтобы все недиагональные члены системы (10) были бы равны нулю, что обуславливает ортогональность факторов. При упрощении системы (10) были использованы следующие уравнения

$$\sum_{j=1}^{N} X^{2p} = \overline{X^{2p}} \cdot N . \qquad (12)$$

$$\sum_{j=1}^{N} X_j^{2p+1} = \overline{X_j^{2p+1}} \cdot N = 0, \quad \text{(см. уравнение (3))}, \qquad (13)$$

1. $\sum_{j=1}^{N} X_{0j} X_{1j} = \sum_{j=1}^{N} X_j \equiv 0.$ Факторы (X_0, X_1) – ортогональны (14)

$$2.\begin{cases} \sum_{j=1}^{N} X_{0j} X_{2j} = \sum_{j=1}^{N} \left(X_j^2 - \alpha_{20} \right) = \overline{X^2} N - \alpha_{20} N = 0 \to \alpha_{20} = \overline{X^2} \\ \sum_{j=1}^{N} X_{1j} X_{2j} = \sum_{j=1}^{N} X_j (X_j^2 - \alpha_{20}) = \sum_{j=1}^{N} X_j^3 - \alpha_{20} \sum_{j=1}^{N} X_j \equiv 0 \end{cases} \quad (15)$$

Факторы (X_0, X_2), (X_1, X_2) – ортогональны при $\boldsymbol{\alpha_{20} = \overline{X^2}}$. (16)

$$3.\begin{cases} \sum_{j=1}^{N} X_{0j} X_{3j} = \sum_{j=1}^{N} X_{0j} \left(X_j^3 - \alpha_{31} X_j \right) = \sum_{j=1}^{N} X_j^3 - \alpha_{31} \sum_{j=1}^{N} X_j \equiv 0 \\ \sum_{j=1}^{N} X_{1j} X_{3j} = \sum_{j=1}^{N} X_j \left(X_j^3 - \alpha_{31} X_j \right) = \sum_{j=1}^{N} X_j^4 - \alpha_{31} \sum_{j=1}^{N} X_j^2 = \overline{X^4} N - \alpha_{31} \overline{X^2} = 0 \quad \to \alpha_{31} = \frac{\overline{X^4}}{\overline{\overline{X^2}}} \\ \sum_{j=1}^{N} X_{2j} X_{3j} = \sum_{j=1}^{N} \left(X_j^2 - \overline{X^2} \right) \left(X_j^3 - \alpha_{31} X_j \right) = \sum_{j=1}^{N} X_j^5 - \alpha_{31} \sum_{j=1}^{N} X_j^3 - \overline{X^2} \sum_{j=1}^{N} X_j^3 + \alpha_{31} \overline{X^2} \sum_{j=1}^{N} X_j \equiv 0 \end{cases} . \quad (17)$$

Факторы (X_0, X_3), (X_1, X_3), (X_2, X_3) – ортогональны при $\boldsymbol{\alpha_{31} = \frac{\overline{X^4}}{\overline{\overline{X^2}}}}$ (18)

Таким образом, ортогонализация факторов X_0, X_1, X_2, X_3, X_3, позволяет записать однофакторное уравнение регрессии 3-го порядка в ортогональной форме (см. уравнения (8), (14), (16), (18))

$$Y(X) = b_0 X_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3 = b_0 + b_1 X + b_2 \left(X^2 - \overline{X^2} \right) + b_3 \left(X^3 - \frac{\overline{X^4}}{\overline{\overline{X^2}}} \cdot X \right), \quad (19)$$

которое можно использовать для стохастического моделирования и оптимизации, алгоритм применения которого подробно описан в [1].

Список использованных источников

1. Леонов, А.Н. Основы научных исследований и моделирования / А.Н. Леонов, М.М. Дечко, В.Б. Ловкис. – Минск: БГАТУ, 2010. – 276 с.