УДК 511.42

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ТОЧКИ В КУБАХ МАЛОГО ОБЪЕМА

О. Н. Кемеш
старший преподаватель кафедры высшей математики БГАТУ, г. Минск, РБ
И. М. Морозова
декан факультета предпринимательства и управления БГАТУ, г. Минск, РБ
Н. В. Сакович
кандидат физико-математических наук, доцент
МГУ имени А. А. Кулешова, г. Могилев, РБ

В работе доказаны два утверждения о корнях α_1, α_2, α_3 целочисленных многочленов P третьей степени. Оказывается, что существуют кубы со стороной c_1Q^{-1}, в которых нет корней P. С другой стороны, можно найти $c_2 > 0$, что в любом кубе со стороной большей c_2Q^{-1} не менее c_3Q точек $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$.

Зависимость корней многочленов от коэффициентов многочлена является одной из классических задач математики. В настоящей статье мы исследуем проблему плотности векторов $\overline{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ в $\mathbb{R}^3$, где $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ – действительные корни многочлена

$$P(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0\in\mathbb{Z}[x]. \qquad (1)$$

Эта задача имеет прямое отношение к построению эффективных регулярных систем векторов с алгебраическими координатами. Понятие регулярной системы введено в [1]. Это понятие близко к понятию равномерного распределения и дает количественную картину для всюду плотных множеств. Например, в [1] доказано, что действительные алгебраические числа образуют регулярную систему, что позволило получить точную нижнюю оценку размерности Хаусдорфа множества действительных чисел, с заданным порядком приближаемых алгебраическими числами. В 1999 г. В.В. Береснevич [2] доказал более сильную версию регулярности распределения алгебраических чисел, и доказал полный аналог теоремы Хинчина [3] для многочленов.

В монографии [4] отмечается, что единственным неэффективным условием при построении регулярных систем является зависимость высоты алгебраических чисел от длины интервалов, объемов кубов, в которых они лежат. Эта задача была решена только в случае многочленов первой и второй степени [2], [4]. Недавно появилось решение и для $n = 3$ [5]. Однако даже для них указанная в [2], [4] зависимость не является наилучшей, и в работе [5] показано, что логарифмический множитель можно опустить.

В данной работе будут доказаны две теоремы о распределении векторов с алгебраическими координатами.

Пусть $E = [0,1)^3$ – единичный куб. Обозначим через $H = H(P) = \max_{0\le j\le 3} |a_j|$ высоту многочлена (1), а через $H(\alpha)$ высоту алгебраического числа α, определяемую как высоту минимального многочлена для α. Введем класс многочленов, связанный с достаточно большим натуральным числом $Q > Q_0$:

$$\mathcal{P}_3(Q) = \{P \in \mathbb{Z}[x] : \deg P = 3, H(P) \le Q\}. \quad (2)$$

Через $c_1 = c_1(n), c_2 = c_2(n), \ldots$ будем обозначать постоянные величины, зависящие от *n*, не зависящие от *H* и *Q*. При достаточно малом $\delta \in \mathbb{R}_+$ определим множество

$$M_\delta := \{\overline{x} = (x_1, x_2, x_3) \in E : |x_i - x_j| < \delta, i \ne j\}. \quad (3)$$

Будем считать, что кубы $T = I_1 \times I_2 \times I_3$ со стороной $|I_j| = c_1 Q^{-\mu}$, $0 \le \mu \le 1$, взяты из множества

$$B_1 \subset (E \setminus M_\delta). \quad (4)$$

Теорема 1. *Существуют кубы $T \subset B_1$ со стороной $c_2 Q^{-1}$, которые не содержат векторов $\overline{\alpha}$ с координатами, являющимися корнями многочлена $P \in \mathcal{P}_3(Q)$.*

Теорема 2. *При любом $0 \le \mu \le \frac{1}{2}$ и достаточно большой величине c_3 в каждом кубе T, где $\mu T = c_3^3 Q^{-3\mu}$, есть не менее $c_3' Q^4 \mu T$ векторов $\overline{\alpha}$, координаты которых являются корнями $P \in \mathcal{P}_3(Q)$ при условии $H(P) > c_4 Q$.*

Доказательство теорем основывается на следующих леммах.

Лемма 1 ([6]) Пусть $|P(x)| < Q^{-w}$, $w > 0$, и α_1 – ближайший к *x* корень полинома *P*(*x*). Тогда справедливы неравенства

$$\begin{aligned} |x - \alpha_1| &\le 3Q^{-w} |P'(x)|^{-1} \text{ для } P'(x) \ne 0, \\ |x - \alpha_1| &\le 4Q^{-w} |P'(\alpha_1)|^{-1} \text{ для } P'(\alpha_1) \ne 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Лемма 2. *Для того, чтобы полином $P \in \mathbb{Z}[x]$ степени $\deg P = n$ имел ограниченные по модулю корни (не стремящиеся по модулю к $+\infty$, при $H \to \infty$) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$|a_n| \ge c_4 H,$$

где $0 < c_4 < 1$ и a_n – старший коэффициент многочлена P.

В лемме 2 в [6] доказана только достаточность. Докажем необходимость. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ – корни многочлена $P(x) = a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)$. Если корни $|\alpha_j| < c_5$, то запишем P в виде

$$P(x) = a_n(x^n - S_1(\bar{\alpha})x^{n-1} + \ldots \pm S_j(\bar{\alpha})x^{n-j} \mp \ldots \pm S_{n-1}(\bar{\alpha})x \mp S_n(\bar{\alpha})),$$

где $S_j(\bar{\alpha})$ – j-ая элементарная симметрическая функция от корней P, например, $S_1(\bar{\alpha}) = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$ и $S_n(\bar{\alpha}) = \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$. Пусть высота $H(P)$ у многочлена P достигается при коэффициенте a_j, т. е. $|a_n S_{n-j}(\bar{\alpha})| = H$. Так как из вида $S_{n-j}(\bar{\alpha})$ и условия $|\alpha_i| < c_5$ следует $|S_{n-j}(\bar{\alpha})| \le C_n^j c_5^{n-j} \le 2^n \max\{c_5, c_5^n\}$, то $|a_n| > 2^{-n} H / \max\{c_5, c_5^n\}$.

Доказательство теоремы 1. Построим куб T, внутри которого нет корней многочлена $P \in \mathcal{P}_3(Q)$. Рассмотрим куб T с центром в точке $(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ и ребром $c_2 Q^{-1}$. Числа $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{2}$ являются корнями многочлена $P_1(x) = 24(x-\frac{1}{4})(x-\frac{1}{3})(x-\frac{1}{2}) \in \mathbb{Z}[x]$. Возьмем многочлен $P_2 \in \mathcal{P}_3(Q)$ среди корней которого нет чисел $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{2}$. Все корни многочлена P_2 удовлетворяют неравенству $|\alpha_j| < 1$, так как лежат в $T \subset E$. Все модули разностей $|\alpha_i - \beta_j| < 1$, $1 \le i, j \le 3$, $\beta_j \in \{\frac{1}{4}; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}\}$. Один из корней α_1 удовлетворяет неравенству $|\alpha_1 - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2} c_2 Q^{-1}$, второй $|\alpha_2 - \frac{1}{3}| < \frac{1}{2} c_2 Q^{-1}$, третий $|\alpha_3 - \frac{1}{4}| < \frac{1}{2} c_2 Q^{-1}$. Рассмотрим результант целочисленных многочленов P_1 и P_2, и оценим его модуль снизу единицей. Имеем

$$1 \le |R(P_1, P_2)| = 24^3 |a_3|^3 \prod_{1 \le s \le 3} \left| \frac{1}{s+1} - \alpha_s \right| < 24^3 |a_3|^3 2^{-3} c_2^3 Q^{-3} < 2^{12} c_2^3. \quad (6)$$

Если $c_2 < 2^{-4}$, то неравенство (6) противоречиво, что доказывает существование куба со стороной $2^{-4} Q^{-1}$, в котором нет векторов $\bar{\alpha}$. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим систему неравенств

$$\begin{cases} |P(x_1)| < 8Q^{-1/3}, \\ |P(x_2)| < 8Q^{-1/3}, \\ |P(x_3)| < 8Q^{-1/3}, \end{cases} \qquad (7)$$

где $P \in \mathcal{P}_3(Q)$. Используя принцип ящиков Дирихле, нетрудно доказать, что она разрешима в каждой точке $\overline{x} \in T$. Для производных $P'(x_i)$ очевидно справедлива оценка $|P'(x_i)| < 9Q < 2^4 Q$. Для того, чтобы применить к системе (7) лемму 1 необходимо получить оценку снизу для производных $P'(t)$ в точках $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ или $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Если будут выполняться оценки $|P'(\alpha_i)| > \delta_0 Q$ для любого $1 \le i \le 3$, где $\delta_0 \in \mathbb{R}_+$, то из леммы 1 мы можем заключить, что $|x_i - \alpha_i| < 2^5 \delta_0^{-1} Q^{-4/3}$ и внутри T окажется вектор $\overline{\alpha}$. Покажем, что если хотя бы одна из оценок снизу для $|P'(\alpha_i)| > \delta_0 Q$ не выполняется, то мы сможем выбрать такую малую величину δ_0, что система неравенств (7) вместе с новыми условиями

$$|P'(\alpha_1)| \le \delta_0 Q, \ |P'(\alpha_2)| < 2^4 Q, \ |P'(\alpha_1)| < 2^4 Q \qquad (8)$$

разрешима только на множестве $B_2 \subset T$, $\mu B_2 < \frac{1}{4} \mu T$.

Из условий (7) следует, что каждый корень α_j полинома третьей степени $P \in \mathcal{P}_3(Q)$ близок к своей координате x_j точки $\overline{x}$. Поскольку по условию (3) переменные разделены, то разделены и корни α_j, что можно записать в виде

$$|\alpha_i - \alpha_j| > \frac{\delta}{2}, \ 1 \le i, j \le 3, i \ne j. \qquad (9)$$

Если a_3 – старший коэффициент P, то можно считать $a_3 > 0$ и используя (9), получить

$$|P'(\alpha_1)| = |a_3(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)| > 2^{-2} \delta^2 a_3. \qquad (10)$$

Из первого неравенства (8) и (10) имеем

$$a_3 < 2^2 \delta_0 \delta^{-2} Q. \qquad (11)$$

Отметим, что неравенство (10) выполняется для $|P'(\alpha_2)|$ и $|P'(\alpha_3)|$. При фиксированном полиноме $P \in \mathcal{P}_3(Q)$ с помощью леммы 1 и (10) оценим меру $\sigma(P)$ решений системы неравенств (7):

$$|x_i - \alpha_i| < 2^5 Q^{-1/3} 2^2 \delta^{-2} a_3^{-1} = 2^7 \delta^{-2} a_3^{-1} Q^{-1/3}, 1 \le i \le 3. \tag{12}$$

Для произведения $M = \prod_{i=1}^{3} |x_i - \alpha_i|$ из (12) получим оценку

$$M < 2^{21} \delta^{-6} a_3^{-3} Q^{-1}. \tag{13}$$

Оценку (13) надо просуммировать по всем полиномам P, для которых выполняется система неравенств (7), (8) и вектор $\overline{x} \in T$. Обозначим через d_i середину интервала I_i. Тогда любую точку из I_i можно записать в виде

$$x_i = d_i + \gamma_i c_3 Q^{-\mu}, 0 < |\gamma_i| < \frac{1}{2}. \tag{14}$$

Подставим x_i из (14) в (7) и проведем упрощения. Получаем

$$|P(d_i)| < c_6 a_3 Q^{-\mu}, \ 1 \le i \le 3, \tag{15}$$

согласно лемме 2 и (11). Преобразуем (15) в систему уравнений

$$P(d_i) = \lambda_i c_6 a_3 Q^{-\mu}, \ |\lambda_i| \le 1, 1 \le i \le 3. \tag{16}$$

Зафиксируем коэффициент a_3 полинома $P \in \mathcal{P}_3(Q)$ и полином $P_1(t) = a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0 \in \mathcal{P}_3(Q)$, для которого выполняются (14) и (16). Тогда для $P_1(t)$ и любого другого полинома $P_2(t) = a_3 t^3 + a_2' t^2 + a_1' t + a_0' \in \mathcal{P}_3(Q)$, для которого верно равенство (16), имеем

$$\begin{aligned} |P_2(d_i) - P_1(d_i)| &= |(a_2' - a_2) d_i^2 + (a_1' - a_1) d_i + (a_0' - a_0)| \\ &< \lambda_i' c_6 a_3 Q^{-\mu}, \ |\lambda_i'| \le 2, 1 \le i \le 3. \end{aligned} \tag{17}$$

Разрешим (17) относительно каждой из разностей $a_k' - a_k$, $0 \le k \le 2$. Получим

$$|a_k' - a_k| < c_7 a_3 Q^{-\mu}.$$

Это означает, что все многочлены P_2 должны иметь коэффициенты a_k', $0 \le k \le 2$, отличающиеся от коэффициентов a_k не более чем на $2c_7 a_3 Q^{-\mu}$. Их общее число не превосходит $S = 2^3 c_7^3 a_3^3 Q^{-3\mu}$. Тогда мера всех $\overline{x}$, для которых выполняется система неравенств (7), (8) не превосходит по (13) величины SM и

$$SM < 2^{24} c_7^3 a_3^3 Q^{-3\mu} a_3^{-3} Q^{-1} \delta^{-6} = 2^{24} c_3^{-3} c_7^3 \delta^{-6} Q^{-1} \mu T. \tag{18}$$

Просуммируем оценку (18) по всем a_3 из (11). Получим оценку

$$2^{26} \delta_0 \delta^{-8} c_3^{-3} c_7^3 \mu T,$$

которую за счет выбора δ_0 можно сделать меньше $\frac{1}{4}\mu T$. Теорема 2 доказана, так как на дополнении этого множества до T все производные имеют максимальный порядок.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Baker A., Schmidt W. M.*** // Proc. London Math. Soc. 1970. – Vol. 21. – P. 1–11.
2. ***Beresnevich V. V.*** // Acta Arith. 1999. Vol. 90, N 2. P. 97-112.
3. ***Khintchine A. J.*** // Math. Ann. 1924. – Vol. 92. – P. 115–125.
4. ***Bugeaud Y.*** Approximation by algebraic numbers. Cambridge: CUP, 2004.
5. ***Bernik V. I., Budarina N.V., O'Donnell H.*** // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2013. – Vol. 280, Suppl. 2. – P. 31–43.
6. ***Спринджук, В. Г.*** Проблема Малера в метрической теории чисел / В. Г. Спринджук. – Минск, 1967.

Поступила в редакцию 24.11.2014 г.
Контакты: (+375 017) 263-81-22 (Кемеш Оксана Николаевна)

Summary

The distribution of the roots of the integer polynomials of third degree in the small cubes is investigated.