Литература

1. Макаров Е. К. *Аксиоматическое представление классов малости возмущений коэффициентов линейных дифференциальных систем* // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки, 2014, вып. 1, С. 46–57.

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ ПРИ СТЕПЕННО УБЫВАЮЩИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ ИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Н. С. Нипарко (Минск, Беларусь)

Класс линейных дифференциальных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

с кусочно-непрерывными и ограниченными на временно́й полуоси $t \geqslant 0$ матрицами коэффициентов $A(\cdot)$ обозначим через $\mathcal{M}_n$. Через $\lambda_1(A) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A)$ обозначим показатели Ляпунова системы (1). Наряду с системой (1) рассмотрим возмущённую систему

$$\dot{y} = (A(t) + Q(t))y, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{2}$$

где кусочно-непрерывная $n \times n$-матрица-возмущение $Q(\cdot)$ принадлежит тому или иному классу возмущений, которые будут указаны ниже. В соответствии с принятыми обозначениями $\lambda_1(A+Q) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A+Q)$ – показатели Ляпунова системы (2).

Через Z_0^n обозначим класс кусочно-непрерывных $n \times n$-матриц $Q(\cdot)$, норма которых убывает к нулю на бесконечности. Пусть $\mathfrak{M} \subset \mathrm{Z}_0^n$ – какой-либо подкласс класса Z_0^n. Показатели Ляпунова системы (1) называются устойчивыми при возмущениях из класса $\mathfrak{M}$, если $\lambda_i(A+Q) = \lambda_i(A)$ для всех $i = 1, \ldots, n$ и любой матрицы $Q(\cdot) \in \mathfrak{M}$. То, что показатели Ляпунова систем (1) могут быть неустойчивыми даже при экспоненциально убывающих возмущениях их матриц коэффициентов, установлено ещё О. Перроном [1]. К настоящему времени необходимые и достаточные условия устойчивости показателей Ляпунова системы из $\mathcal{M}_n$ в терминах её матрицы Коши получены только для класса Z_0^n [2,3] и класса Exp_0^n экспоненциально убывающих возмущений [4]. Одним из основных понятий в терминах которых формулируются эти критерии, является понятие разделённости (интегральной разделённости в случае класса Z_0^n и экспоненциальной разделённости в случае класса Exp_0^n).

В работе [5], следуя схеме рассуждений работ [2–4], получено необходимое условие устойчивости показателей Ляпунова при возмущениях из класса Deg_0^n – возмущениях, норма которых убывает на бесконечности к нулю степенным образом, – и сформулирован аналог понятий интегральной и экспоненциальной разделённости, названный степенной разделённостью. Как показано в работе [6], это необходимое условие не является достаточным, а условие интегральной разделённости вместе с остальными естественными условиями, которым должны удовлетворять линейные системы, показатели Ляпунова которых не устойчивы при возмущениях из класса Deg_0^n, не гарантирует устойчивости показателей при возмущениях из этого класса. Следующая теорема даёт некоторое усиление результата работы [6].

Теорема. *Для любого натурального $n \geqslant 2$, каждого $q \in \{2, \ldots, n\}$, произвольного набора $\Lambda_1 < \ldots < \Lambda_q$ вещественных чисел, любого набора $n_1, n_2, \ldots, n_q$ натуральных чисел, удовлетворяющего равенству $n_1 + n_2 + \ldots + n_q = n$, и произвольных $q-1$ наборов $\lambda_1^k \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{n_k}^k$, $k = \overline{1, q-1}$, вещественных чисел, таких, что $\lambda_j^k \in [\Lambda_k, \Lambda_{k+1}]$, $j = \overline{1, n_k}$, существуют линейные дифференциальные системы с кусочно-непрерывными и ограниченными на временно́й полуоси коэффициентами*

$$\dot{x}_i = A_i(t)x_i, \quad x_i \in \mathbb{R}^{n_i}, \quad t \geqslant 0, \tag{3}$$

где $i = 1, \ldots, q$, такие, что система A_i имеет один-единственный показатель Ляпунова Λ_i, устойчивый при возмущениях из класса $\mathrm{Deg}_0^{n_i}$ $(i = 1, \ldots, q)$, и для каждого $k = \overline{1, q-1}$ система

A_{k+1} *степенно интегрально больше системы* A_k, *а показатели Ляпунова блочно-диагональной системы*

$$\dot{x} = \operatorname{diag}[A_1(t), \dots, A_q(t)]x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{4}$$

неустойчивы при возмущениях из класса Deg_0^n, *при этом найдётся возмущение* $Q(\cdot) \in \mathrm{Deg}_0^n$, *при котором* $\lambda_{i+n_1+\ldots+n_{k-1}}(A+Q) = \lambda_i^k$ *для всех* $k = \overline{1, q-1}$ *и* $i = \overline{1, n_k}$, *где* $n_0 \overset{\text{def}}{=} 0$.

Литература

1. Perron O. *Die Ordnungszahlen linearer Differentialgleichungssysteme* // Math. Zeitschr. 1930. Bd 31, Hf 5. S. 748–766.

2. Миллионщиков В.М. *Грубые свойства линейных систем дифференциальных уравнений* // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5, № 10. С. 1775–1784.

3. Былов Б.Ф., Изобов Н. А. *Необходимые и достаточные условия устойчивости характеристических показателей линейной системы* // Дифференц. уравнения. – 1969. – Т. 5, № 10. – С. 1794–1803.

4. Барабанов Е. А., Денисенко (Нипарко) Н. С. *Необходимое и достаточное условие устойчивости показателей Ляпунова линейных дифференциальных систем при экспоненциально убывающих возмущениях* // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43, № 2. С. 165 – 175.

5. Нипарко Н. С. *Необходимое условие устойчивости показателей Ляпунова линейных дифференциальных систем при степенно убывающих возмущениях* // Национальная академия наук Беларуси. Труды Института математики. 2008. Т. 16, № 2. С. 105 — 117.

6. Барабанов Е. А., Нипарко Н. С. *Неустойчивость показателей Ляпунова степенно интегрально разделенной линейной дифференциальной системы при степенно убывающих возмущениях* // Доклады НАН Беларуси. 2013. Т. 57, № 4. С. 25 – 31.

ОБ УСЛОВИЯХ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОЙ ЛОКАЛЬНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ СПЕКТРА ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА СИСТЕМ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

С. Н. Попова (Ижевск, Россия)

Рассмотрим линейную управляемую систему с дискретным временем

$$x(k+1) = A_0(k)x(k) + B_0(k)u(k), \quad k \in \mathbb{N}, \ x \in \mathbb{R}^n, \ u \in \mathbb{R}^m, \tag{1}$$

с вполне ограниченной [1] матрицей $A_0(\cdot)$ и ограниченной матрицей $B_0(\cdot)$. Управление $u(\cdot)$ в системе (1) выберем в виде линейной обратной связи $u(k) = U(k)x(k)$, получим замкнутую систему вида

$$x(k+1) = \big(A_0(k) + B_0(k)U(k)\big)x, \quad k \in \mathbb{N}, \ x \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Будем называть $U(\cdot)$ *матричным управлением* для системы (2). Будем говорить, что матричное управление $U(\cdot)$ *допустимо* для системы (2), если матрица $A_0(\cdot) + B_0(\cdot)U(\cdot)$ вполне ограничена на $\mathbb{N}$.

Пусть зафиксировано некоторое допустимое для (2) матричное управление $U(\cdot)$. Тогда для замкнутой системы (2) с выбранным управлением $U(\cdot)$ определен полный спектр [2] показателей Ляпунова $\lambda_1(A_0 + B_0U) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A_0 + B_0U)$.

Определение 1 [3]. Полный спектр показателей Ляпунова системы (2) называется *пропорционально локально управляемым*, если существуют такие $\delta > 0$ и $\ell > 0$, что для любого набора чисел $\mu_1 \leqslant \ldots \leqslant \mu_n$, такого, что $\max\limits_{j=1,\ldots,n} |\mu_j - \lambda_j(A_0)| \leqslant \delta$, найдется допустимое для (2) управление $U(\cdot)$, удовлетворяющее оценке $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|U(n)\| \leqslant \ell \max\limits_{j=1,\ldots,n} |\mu_j - \lambda_j(A_0)|$ и обеспечивающее выполнение равенств $\lambda_j(A_0 + B_0U) = \mu_j$ при всех $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Определение 2. Система (1) называется *равномерно вполне управляемой*, если существуют такие $\alpha > 0$ и $K \in \mathbb{N}$, что матрица Калмана

$$W(k, k+K) \doteq \sum_{j=k}^{k+K-1} X(k, j+1)B_0(j)B_0^T(j)X^T(k, j+1)$$