

ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

А.В. ЧИГАРЕВ, Ю.В. ЧИГАРЕВ

КУРС ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

*Рекомендовано Учебно-методическим центром
«Профессиональный учебник» в качестве
учебного пособия для студентов
высших учебных заведений*

*Допущено Министерством образования
Республики Беларусь в качестве учебного
пособия для студентов высших учебных
заведений по техническим специальностям*

«НОВОЕ ЗНАНИЕ»



2010

«ЦУПТ»

УДК 531(075.8)

ББК 22.21

Ч-58

Серия основана в 2005 году

Рецензенты:

кафедра «Теоретическая и прикладная механика» Белорусского государственного технологического университета (зав. кафедрой — доктор физико-математических наук, профессор *В.С. Вихренко*);

зав. кафедрой «Теоретическая и прикладная механика» Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор *М.А. Журавков*

Чигарев, А. В.

Ч-58 Курс теоретической механики : учеб. пособие / А.В. Чигарев, Ю.В. Чигарев. — Минск : Новое знание ; М. : ЦУПЛ, 2010. — 399 с. : ил. — (Техническое образование).

ISBN 978-985-475-380-5 (Новое знание).

ISBN 978-5-91889-001-1 (ЦУПЛ).

Включает все темы курса «Теоретическая механика», однако порядок их изложения отличается от присущего традиционным учебникам. Первый раздел посвящен векторной динамике точки и системы, причем динамика механических систем рассматривается как композиция трех геометрий: геометрии сил (статики), геометрии масс и геометрии движений (кинematики). В отдельный раздел выделены темы, связанные с динамикой твердого тела и имеющие прикладное значение. В пособие также включен раздел «Элементы нелинейной динамики», не традиционный для русскоязычных учебников по теоретической механике.

Для студентов и преподавателей высших учебных заведений, магистрантов, аспирантов. Может быть полезно инженерным и научным работникам.

УДК 531(075.8)

ББК 22.21

ISBN 978-985-475-380-5 (Новое знание)
ISBN 978-5-91889-001-1 (ЦУПЛ)

© Чигарев А.В., Чигарев Ю.В., 2010
© Оформление. ООО «Новое знание»,
ООО «ЦУПЛ», 2010

Оглавление

Предисловие	10
Введение	12

Раздел I. Векторная механика Ньютона

1. Аксиомы Ньютона и основные задачи механики	16
2. Векторная динамика точки и системы материальных точек	20
2.1. Основные законы динамики точки и системы материальных точек в инерциальных системах отсчета	20
2.2. Решение типовых задач	30
2.3. Основные законы динамики в неинерциальных системах отсчета	39
2.4. Принцип Даламбера для материальной точки и для системы материальных точек	42
3. Вариационные дифференциальные принципы механики	48
3.1. Действительные, возможные и виртуальные перемещения	48
3.2. Общее уравнение динамики (принцип Даламбера — Лагранжа)	50
3.3. Вариационные дифференциальные принципы: Журдена, Гаусса, возможных перемещений	52
3.4. Основные уравнения динамики для систем материальных точек со связями	55

Раздел II. Геометрическая статика

4. Геометрия сил	60
4.1. Основные понятия геометрии сил	60
4.2. Аксиомы геометрии сил. Теорема о трех параллельных силах	62
4.3. Активные и пассивные силы. Виды связей	64

4.4. Проекция силы на оси декартовых координат и на плоскость. Аналитический способ сложения сил	68
4.5. Система сходящихся сил	71
5. Теория пар	77
5.1. Сложение двух параллельных сил. Пара сил	77
5.2. Момент силы относительно точки. Теорема Вариньона для системы сходящихся сил	79
5.3. Момент силы относительно оси	82
5.4. Момент пары сил. Теоремы о парах	84
6. Условия равновесия пространственной и плоской систем сил	89
6.1. Лемма о параллельном переносе силы	89
6.2. Основная теорема статики	91
6.3. Аналитическое определение главного вектора и главного момента пространственной системы сил	93
6.4. Условия равновесия пространственной системы сил и системы параллельных сил	95
6.5. Приведение плоской системы сил к простейшему виду	98
6.6. Условия равновесия плоской системы сил	102
6.7. Понятие о статически неопределимых задачах	103
6.8. Распределенные силы	104
6.9. Статические инварианты. Динамический винт	107
6.10. Центральная ось. Уравнение центральной оси	108
6.11. Частные случаи приведения пространственной системы сил	109
7. Расчет равновесия системы тел и ферм	112
7.1. Равновесие системы тел	112
7.2. Аналитический расчет плоских ферм	114

8. Трение	118
8.1. Равновесие с учетом трения	118
8.2. Угол и конус трения	119
8.3. Трение нити о цилиндрическую поверхность	122
8.4. Равновесие тела при наличии трения качения	124
9. Центр тяжести	128
9.1. Центр параллельных сил	128
9.2. Формулы координат центра тяжести твердого тела	129
9.3. Формулы координат центра тяжести объема, площади и линии	130
9.4. Методы определения центра тяжести некоторых фигур	134
10. Геометрия масс в системах материальных точек и твердых телах	138
10.1. Центр масс (центр инерции) системы материальных точек и твердого тела	138
10.2. Моменты инерции, центробежные моменты ...	140
 Раздел III. Геометрия движений — кинематика	
11. Кинематика точки	146
11.1. Основные понятия	146
11.2. Способы задания движения	146
11.3. Производная вектор-функции по скалярному аргументу	150
11.4. Скорость точки при векторном, координатном, естественном способах задания движения	151
11.5. Ускорение точки при векторном, координатном, естественном способах задания движения	153
11.6. Задание движения точки в криволинейных координатах	160

12. Кинематика абсолютно твердого тела	168
12.1. Поступательное движение твердого тела	168
12.2. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси	169
12.3. Скорости и ускорения точек вращающегося твердого тела	171
12.4. Плоскопараллельное движение твердого тела	174
12.5. Мгновенный центр скоростей	176
12.6. Подвижная и неподвижная центроиды	179
12.7. Определение ускорений точек тела при плоскопараллельном движении	181
12.8. Мгновенный центр ускорений	183
13. Движение твердого тела вокруг неподвижной точки и движение свободного твердого тела	186
13.1. Движение твердого тела, имеющего одну неподвижную точку	186
13.2. Скорости и ускорения точек тела	187
13.3. Движение свободного твердого тела	190
14. Сложное движение точки	192
14.1. Относительное, переносное и абсолютное движения	192
14.2. Скорость и ускорение точки в сложном движении	193
15. Сложное движение твердого тела	202
15.1. Сложение поступательных движений	202
15.2. Сложение вращений вокруг пересекающихся осей	203
15.3. Кинематические уравнения Эйлера	205
15.4. Пара вращений	210
15.5. Сложение вращений вокруг параллельных осей	210
15.6. Сложение поступательных и вращательных движений	212

Раздел IV. Механика Лагранжа — Гамильтона

16. Аналитическая механика систем материальных точек 216
- 16.1. Связи, классификации, число степеней свободы. Обобщенные координаты, скорости 216
- 16.2. Уравнения Лагранжа второго рода 217
- 16.3. Закон изменения полной механической энергии голономной системы для непотенциальных сил 221
- 16.4. Канонические уравнения Гамильтона 225
17. Вариационные интегральные принципы классической механики 227
- 17.1. Дифференцирование и варьирование в механике 227
- 17.2. Вариационный принцип Гамильтона — Остроградского 230
- 17.3. Вывод уравнения Лагранжа второго рода из принципа Гамильтона — Остроградского ... 233
- 17.4. Вывод канонических уравнений механики из принципа Гамильтона — Остроградского ... 234
- 17.5. Принцип стационарного действия Мопертюи — Лагранжа 235

Раздел V. Применение основных законов и принципов теоретической механики

18. Динамика твердого тела 238
- 18.1. Понятие абсолютно твердого тела 238
- 18.2. Движение твердого тела вокруг закрепленной точки 242
- 18.3. Гироскоп 246
- 18.4. Движение твердого тела 250
- 18.5. Ударное взаимодействие твердых тел 257

18.6. Применение основных законов механики удара	263
18.7. Колебательные движения точки, системы точек, твердого тела	270
19. Линейные колебания	276
19.1. Свободные незатухающие колебания	276
19.2. Свободные затухающие колебания	278
19.3. Вынужденные колебания осциллятора без затухания. Резонанс, биение	280
19.4. Вынужденные затухающие колебания	284

Раздел VI. Элементы нелинейной динамики

20. Нелинейные колебания	288
20.1. Особенности нелинейных колебаний	288
20.2. Свободные колебания маятника	293
20.3. Консервативные (гамильтоновы) системы	298
20.4. Диссипативные системы	299
20.5. Системы с переменными параметрами (параметрические системы)	305
20.6. Затухание параметрических колебаний	310
20.7. Элементы теории бифуркации	313
21. Исследование динамических систем методом сечений Пуанкаре	319
21.1. Определение потока	319
21.2. Сечения Пуанкаре	320
21.3. Различные типы сечений Пуанкаре	323
21.4. Отображение первого возвращения	327
21.5. Практическая реализация	332
22. Детерминированный хаос в диссипативных динамических системах	336
22.1. Асимптотическое поведение диссипативной динамической системы	336
22.2. Теория Флөке	340

23. Диссипация энергии в динамических системах, аттракторы, фракталы. Переход к хаотическому движению	345
23.1. Эффекты притяжения	345
23.2. Аперiodические аттракторы	351
23.3. Измерение размерности странных аттракторов	356
24. Устойчивость движения, показатели Ляпунова и классификация аттракторов	364
24.1. Показатель Ляпунова	364
24.2. Анализ частных случаев	366
24.3. Методы определения показателей Ляпунова	370
24.4. Характеристики аттрактора	373
25. Синергетика и автоколебания	375
25.1. Понятие о самоорганизации динамических систем	375
25.2. Автоколебания	378
25.3. Маятник с отрицательным трением	381
25.4. Осциллятор Ван-дер-Поля	387
25.5. Осциллятор с односторонним трением	391
Литература	398

Предисловие

Большинство учебных пособий и учебников по теоретической механике включают три раздела: статику, кинематику и динамику. При такой структуре студенты знакомятся с теоретической механикой начиная с простых разделов и заканчивая более сложными, в результате динамика оказывается наименее освоенной.

Исходя из этого, авторы построили структуру данного учебного пособия так, что оно начинается с векторной динамики точки, системы, изложенной достаточно сжато. Центрами *первого раздела* являются уравнения Ньютона и получаемые на их базе основные теоремы динамики. Здесь же приводятся и дифференциальные вариационные принципы. Этот материал занимает первые три главы. В гл. 4 к основному уравнению динамики, которое представляет собой комбинацию силовых, кинематических и инерционных характеристик, применен метод декомпозиции. Это позволяет рассматривать динамику механических систем как композицию трех геометрий: геометрии сил (статики), геометрии масс, геометрии движений (кинематики).

Второй раздел содержит традиционное изложение геометрической статики, рассматриваемой как частный случай обратной задачи динамики. Считается, что задано движение с нулевой скоростью (покой), и требуется найти силы, под действием которых это состояние системы реализуется в течение некоторого интервала времени. Здесь же определяются параметры геометрии масс: центр тяжести, центр масс, моменты инерции и центробежные моменты.

Третий раздел посвящен изучению наиболее общих параметров траекторий точки, систем материальных точек, твердого тела — геометрии движений (кинематики), которые имеют место для произвольных систем сил.

Материал 4–10 глав дает детальное описание геометрии векторов, называемых в механике силами, гл. 11–15 — геометрии скоростей и ускорений. Этот подход реализует принцип обучения от общего к частностям и, по мнению авторов, создает в представлении студентов правильную иерархию разделов тео-

ретической механики. Таким образом, векторная механика Ньютона излагается достаточно традиционно, порядок следования разделов также не является чем-то новым.

Четвертый раздел учебного пособия посвящен аналитической механике Лагранжа — Гамильтона и содержит материал, традиционный для учебников по теоретической механике, включая интегральные вариационные принципы.

В *пятый раздел* выделены темы, связанные с динамикой твердого тела и имеющие непосредственное прикладное значение.

Шестой раздел не является традиционным для русскоязычных учебников по теоретической механике. Однако проблемы применения нелинейных моделей в различных областях науки, техники и технологии требуют знания методов исследования нелинейных систем. Например, некоторые асимптотические методы позволяют с достаточной эффективностью приближенно решать многие интересные задачи для нелинейных дифференциальных уравнений. В последние десятилетия активно развивались методы качественного исследования нелинейных динамических систем, позволившие описать явления возникновения детерминированного хаоса и самоорганизации. В данном пособии излагаются некоторые результаты таких исследований, надежность которых достаточно хорошо подтверждена во многих публикациях разных авторов.

А. Чигарев
Ю. Чигарев

ВВЕДЕНИЕ

Теоретическая механика — научная, учебная дисциплина о наиболее общих законах и принципах механики, формулируемых для моделей реальных явлений и объектов окружающего мира. Теоретическая механика, как и математика, стремится выделить общее в различных явлениях, объектах и построить логические модели, которые могут быть исследованы методами математики.

Абстрагируясь от конкретных объектов, механика рассматривает *тела* — модели, основанные на математических понятиях множества точек.

Элементарным структурным элементом в математике является *точка* — объект, не имеющий объема и формы. Однако континуум точек имеет объем и форму. Это свойство переносится в теоретическую механику, причем в таких разделах механики, как статика и кинематика, мы имеем дело именно с математической точкой, математическими множествами точек, математическими телами.

Естественно, что математическая, да и механическая точка — это абстракция. Реально мы всегда имеем дело с телами. Считать данное тело точкой корректно лишь в том случае, если его размеры значительно меньше других масштабов задачи. (Например, расстояние между телами значительно превышает их размеры, как в небесной механике.)

В динамике точке приписывается некоторая абстрактная величина, присущая всем телам, — *масса* и вводятся математические понятия, характеризующие геометрию масс.

Процесс изменения положения тела с течением времени называется *движением*. Движения тел, изменение места и состояния воспринимаются как происходящие под воздействием сил. *Сила* — абстрактное понятие причины изменения состояния тела — может иметь различную конкретную природу.

Теоретическая механика в широком смысле этого слова состоит из механики абсолютно твердого тела, изучающей движение как перемещение всех точек тела без изменения расстояний между ними (форма и объем неизменны), и механики сплошных сред, изучающей наиболее общие математические модели и методы механики деформирования тел (изменение формы и объема). Объединяет эти разделы то, что они базируются на одних и тех же основных законах механики.

Количество технических задач, решаемых с помощью теоретической механики, необъятно и число их растет вместе с научно-техническим прогрессом. Являясь фундаментом физики, теоретическая механика изучает наиболее простые модели объектов реального мира. Непосредственно на ее базе возникла статистическая механика, когда вследствие большого количества частиц становится принципиально невозможным описание поведения таких систем на основе уравнений Ньютона. Вероятностное описание таких систем позволяет учесть возникновение необратимости протекающих процессов. Таким образом, в классической теоретической механике число частиц в системе должно быть значительно меньше, чем, например, молекул газа в единице объема ($n \ll N$) (рис. В1).

Скорости движений точек в классической теоретической механике должны быть значительно меньше скорости света c . Механика частиц, скорости которых близки к скорости света, называется релятивистской. Современная теоретическая

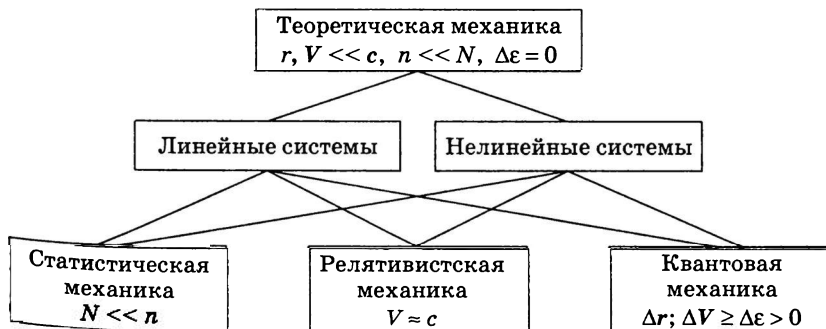


Рис. В1

механика исследует движение со скоростями порядка II космической (11 км/с), что значительно меньше скорости света (300 000 км/с).

В классической теоретической механике выполняется принцип детерминизма, когда положения и скорости материальных точек до и после взаимодействия определяются однозначно, вследствие чего движения частиц прогнозируемы. Принцип неопределенностей, постулирующий принципиальную невозможность одновременно точно определить положение и скорость точки ($\Delta\epsilon > 0$), является основополагающим в квантовой механике, что ведет к тому, что описание состояния частиц осуществляется не уравнениями Ньютона, а уравнениями для волн, интенсивность которых определяет вероятность состояния, в котором находится частица. Вероятностные закономерности могут возникать в нелинейных динамических системах уже при числе степеней свободы $\geq 3/2$. С другой стороны, при уменьшении числа степеней свободы возможны процессы самоорганизации в нелинейных системах, изучаемых в синергетике.

В релятивистской механике масса тела с ростом скорости растет, а время замедляется. В статистической механике движение каждой частицы подчиняется законам Ньютона, т.е. обратимо во времени, а поведение множества частиц во времени необратимо. Нарушение детерминизма для квантовых и нелинейных систем также ведет к тому, что процессы становятся необратимыми.

Раздел

I

ВЕКТОРНАЯ МЕХАНИКА НЬЮТОНА

-
1. Аксиомы Ньютона и основные задачи механики
 2. Векторная динамика точки и системы материальных точек
 3. Вариационные дифференциальные принципы механики



АКСИОМЫ НЬЮТОНА И ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ

При построении научной дисциплины физико-математического профиля, основанной на применении математической логики, используется аксиоматический подход. Он состоит в том, что формулируется минимально необходимое количество аксиом (законов), основанных на множестве опытных данных. Получение всех последующих законов и следствий требует формального создания логических моделей и методов их описания. Древнейшая из математических дисциплин — геометрия Евклида — положила начало этому подходу. В ее основе лежат аксиомы Евклида, а все дальнейшие результаты выводятся из них.

В основе векторной механики лежат аксиомы Ньютона.

Первая аксиома, или закон инерции: если на материальную точку не действуют силы, то она сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения.

Эта аксиома утверждает, что существуют два крайних состояния в движении точки (тела), таких, что перейти из одного состояния в другое без некоторого воздействия невозможно. На рис. 1.1 изображен режим изменения скорости точки V , который в реальных системах,



Рис. 1.1

обладающих свойствами инерции, можно осуществить, если в момент t_i , где $i = 1, n$, приложить силы (например, удар).

Ускорение точки в этом случае имеет график вида

$$W(t) = \delta(t - t_i),$$

$$\delta(t-t_i) = \begin{cases} 0, & t \neq t_i, \quad i=1,2,\dots, \\ \infty, & t = t_i, \end{cases}$$

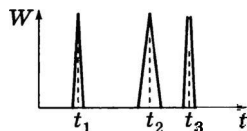


Рис. 1.2

где $\delta(t-t_i)$ — функция Дирака, график которой схематически изображен на рис. 1.2.

Вторая аксиома, или основной закон динамики точки: ускорение точки при изменении состояния прямо пропорционально силе F , действующей на точку, и обратно пропорционально массе точки m :

$$W = \frac{F}{m}. \quad (1.1)$$

Формула (1.1) связывает величины, каждая из которых может быть исследована. В случае произвольного значения F наиболее просто исследуется геометрия движения (кинематика), в состоянии покоя ($W = 0$) можно исследовать геометрию сил (статика), а также геометрию масс. Объединение этих трех геометрий дает динамику.

Третья аксиома, или закон взаимодействия материальных точек: при взаимодействии двух материальных точек (тел) сила действия, с которой одна точка (первое тело) действует на другую точку (второе тело), равна силе противодействия, с которой другая точка (второе тело) действует на первую точку (первое тело), и противоположно ей направлена.

Четвертая аксиома, или закон независимости действия сил (закон сложения сил): если система материальных точек P_i ($i=1,2,\dots,l$) действует на точку P с силами F_i ($i=1,2,\dots,l$), то ускорения W_i , которые они вызывают у точки P , действуя каждая отдельно, складываются.

Если m — масса точки P , то по (1.1) ускорение от действия F_i

$$W_i = \frac{1}{m} F_i.$$

Тогда суммарное ускорение точки P

$$W = W_1 + W_2 + \dots + W_l = \frac{1}{m} (F_1 + F_2 + \dots + F_l). \quad (1.2)$$

Из (1.2) следует, что ускорение W точки P таково, как если бы к ней была приложена одна сила F , равная сумме сил:

$$F = F_1 + F_2 + \dots + F_l.$$

Сила F называется *равнодействующей силой*.

Рассмотрим систему n материальных точек, которые будем обозначать P_k ($k = 1, \dots, n$), а основные геометрические, кинематические и динамические величины — соответственно r_k , V_k , W_k , m_k , F_k , где r_k — радиус-вектор k -й точки. Для каждой точки в инерциальной системе имеет место основное уравнение динамики (1.1) и законы Ньютона:

$$W_k = \frac{F_k}{m_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (1.3)$$

В проекциях на оси координат n уравнений (1.3) представляют собой $3n$ скалярных уравнений.

Рассмотрим *основные задачи механики*. Динамика изучает движение и взаимодействие материальных тел.

Прямая задача. Заданы массы m_k и выражения для сил F_k . Требуется по (1.3) определить закон движения $r_k = r_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots, n$).

Обратная задача. Заданы законы движения $r_k = r_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) материальных точек системы. Требуется определить силы F_k ($k = 1, \dots, n$), которые обуславливают это движение.

Смешанная задача. Заданы часть сил F_k ($k = 1, \dots, l$) и часть законов движения $r_k(t)$ ($k = l + 1, \dots, n$) в уравнении (1.3). Требуется найти неизвестные F_k ($k = l + 1, \dots, n$) и r_k ($k = 1, \dots, l$).

Статика изучает взаимодействие тел в состоянии покоя. В этом состоянии законы движения известны $r_k(t) = r_k(0)$ ($k = 1, \dots, n$), поэтому необходимо найти силы F_k ($k = 1, \dots, n$), обуславливающие это состояние. Таким образом, статика есть частный случай обратной задачи динамики.

В векторной механике решение задач статики фактически представляет выполнение операций векторной алгебры, так

как название вектора термином «сила» носит формальный характер.

Кинематика изучает движения без рассмотрения причин, их обуславливающих. Поэтому изучение движения с помощью методов аналитической и дифференциальной геометрии в кинематике носит чисто геометрический характер.

2

ВЕКТОРНАЯ ДИНАМИКА ТОЧКИ И СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

Основные законы динамики точки и системы материальных точек

2.1. в инерциальных системах отсчета

Механика сплошных сред, изучающая наиболее общие вопросы динамики механических систем, базируется на пяти основных законах: 1) закон сохранения (изменения, баланса) сплошности; 2) закон сохранения количества движения; 3) закон сохранения момента количества движения; 4) закон сохранения энергии; 5) закон сохранения энтропии. Классическая теоретическая механика систем материальных точек также базируется на этих законах, хотя обычно первый и пятый законы не рассматриваются.

1. Закон сохранения массы: при движении масса точки, системы точек, тела остается постоянной в разных инерциальных системах координат, движущихся со скоростями, значительно меньшими световой:

$$M = \sum m_i,$$

где M — масса всей системы; m_i — масса i -й точки.

Случай, когда система обладает переменной массой, рассматривается в механике систем с переменной массой. В релятивистской механике рассматриваются движения с субсветовыми скоростями, когда масса растёт.

2. Закон сохранения количества движения. Вектор $Q = mV$ называется *количеством движения материальной точки*.

Запишем основное уравнение динамики точки (1.1) и преобразуем его:

$$mW = F \Rightarrow m \frac{dV}{dt} = F \Rightarrow \frac{d(mV)}{dt} = \frac{dQ}{dt} = F \Rightarrow dQ = F dt. \quad (2.1)$$

Вектор $F dt$ называется *элементарным импульсом силы*.

Формула (2.1) определяет закон изменения количества движения в дифференциальной форме.

Проинтегрировав (2.1), получим

$$\int_{V_0}^V d(mV) = \int_0^t F dt \Rightarrow mV - mV_0 = \int_0^t F dt.$$

Вектор $\int_{t_0}^t F dt$ называется *импульсом силы за промежуток времени* $[t_0, t]$.

Таким образом, изменение количества движения Q за время $(t - t_0)$ равно импульсу силы F за то же время:

$$Q - Q_0 = \int_{t_0}^t F dt.$$

В проекциях на оси неподвижной системы координат

$$Q_x - Q_{0x} = \int_{t_0}^t F_x dt, \quad Q_y - Q_{0y} = \int_{t_0}^t F_y dt, \quad Q_z - Q_{0z} = \int_{t_0}^t F_z dt.$$

Рассмотрим систему n материальных точек, имеющих радиусы-векторы r_k , массы m_k , приложенные силы F_k .

Вектор $r_C = \frac{\sum_{k=1}^n m_k r_k}{M}$, где $M = \sum_{k=1}^n m_k$, — *центр масс (центр инерции) системы*.

Вектор $Q = \sum_{k=1}^n Q_k = \sum_{k=1}^n m_k V_k$ называется *главным вектором количества движения системы*.

Преобразовав данное выражение, получим эквивалентное представление

$$\mathbf{Q} = \sum_{k=1}^n m_k \mathbf{V}_k = \sum_{k=1}^n m_k \frac{d\mathbf{r}_k}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n m_k \mathbf{r}_k = \frac{d}{dt} (M\mathbf{r}_C) = M \frac{d\mathbf{r}_C}{dt} = M\mathbf{V}_C.$$

Таким образом, *главный вектор количества движения системы материальных точек равен количеству движения центра масс, если сосредоточить в нем всю массу системы.*

Проекция вектора \mathbf{Q} на оси декартовой системы координат имеют вид

$$Q_x = M V_{Cx} = \sum_{k=1}^n m_k V_{kx},$$

$$Q_y = M V_{Cy} = \sum_{k=1}^n m_k V_{ky},$$

$$Q_z = M V_{Cz} = \sum_{k=1}^n m_k V_{kz}.$$

Вектор \mathbf{Q} характеризует поступательное движение системы материальных точек вместе с центром масс.

Основные уравнения динамики для системы материальных точек запишем в виде

$$m_k \mathbf{W}_k = m_k \frac{d\mathbf{V}_k}{dt} = \frac{d(m_k \mathbf{V}_k)}{dt} = \mathbf{F}_k, \quad k=1, \dots, n. \quad (2.2)$$

Складывая в (2.2) и преобразовывая, получаем

$$\sum_{k=1}^n \frac{d(m_k \mathbf{V}_k)}{dt} = \sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k$$

или

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \mathbf{R}^{(e)}, \quad (2.3)$$

где $\mathbf{R}^{(e)} = \sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k^{(e)}$ — главный вектор внешних сил $\mathbf{F}_k^{(e)}$. По третьему закону Ньютона главный вектор $\mathbf{R}^{(i)}$ внутренних сил $\mathbf{F}_k^{(i)}$

$$\mathbf{R}^{(i)} = \sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k^{(i)} = 0.$$

Из дифференциальной формы (2.3) закона изменения главного вектора количества движения

$$\mathbf{Q} - \mathbf{Q}_0 = \int_{t_0}^t \mathbf{R}^{(e)} dt,$$

где $\int_{t_0}^t \mathbf{R}^{(e)} dt$ — главный вектор импульсов внешних сил.

Подставив полученное выше выражение $\mathbf{Q} = M\mathbf{V}_C$ в (2.3), получим закон движения центра масс системы материальных точек:

$$M \frac{d\mathbf{V}_C}{dt} = \mathbf{R}^{(e)} \quad \text{или} \quad M\mathbf{W}_C = \mathbf{R}^{(e)}.$$

Таким образом, движение центра масс системы материальных точек (твердого тела) подчиняется закону Ньютона для одной материальной точки.

3. Закон сохранения момента количества движения. Вектор $\mathbf{M}_O(\mathbf{F}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ называется *моментом силы \mathbf{F}* относительно центра O .

Вектор $\mathbf{K}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{V}$ называется *моментом количества движения* материальной точки относительно центра O .

Векторным образом умножим основное уравнение динамики $m\mathbf{W} = \mathbf{F}$ на \mathbf{r} :

$$\mathbf{r} \times m\mathbf{W} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

и выполним преобразования

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \times m \frac{d\mathbf{V}}{dt} &= \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{V}) - \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times m\mathbf{V} = \\ &= \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{V}) - \mathbf{V} \times m\mathbf{V} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{V}). \end{aligned}$$

С учетом того, что $V \times V = 0$, получим

$$\frac{d\mathbf{K}_O}{dt} = \mathbf{M}_O(\mathbf{F}). \quad (2.4)$$

Таким образом, имеем изменение момента количества движения в дифференциальной форме.

Производная по времени от момента количества движения материальной точки относительно какого-либо центра равна моменту силы, приложенной к точке, относительно того же центра.

Спроецировав (2.4) на оси координат, получим

$$\frac{dK_{Ox}}{dt} = M_{Ox}(\mathbf{F}),$$

$$\frac{dK_{Oy}}{dt} = M_{Oy}(\mathbf{F}),$$

$$\frac{dK_{Oz}}{dt} = M_{Oz}(\mathbf{F}),$$

или, расписав покомпонентно, будем иметь

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{V}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F},$$

$$\frac{d}{dt} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ m\dot{x} & m\dot{y} & m\dot{z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix},$$

$$m \frac{d}{dt}(y\dot{z} - z\dot{y}) = yF_z - zF_y,$$

$$m \frac{d}{dt}(z\dot{x} - x\dot{z}) = zF_x - xF_z,$$

$$m \frac{d}{dt}(x\dot{y} - y\dot{x}) = xF_y - yF_x.$$

Как было отмечено, изменение главного вектора количества движения системы материальных точек определяет ее поступательное движение. Так как система материальных точек может совершать также вращательные движения, то для их описания вводится главный вектор моментов количества движения (*кинетический момент*) и главный момент всех внешних сил.

Вектор $M_O^{(e)} = \sum_{k=1}^n M_{O_k}^{(e)}(F) = \sum_{k=1}^n r_k \times F_k^{(e)}$ называется *главным моментом внешних сил*.

Вектор $K_O = \sum_{k=1}^n K_{O_k} = \sum_{k=1}^n r_k \times m_k V_k$ называется *главным вектором моментов количества движения* материальных точек системы. Здесь r_k — радиус-вектор точки массой m_k с началом в центре O ; V_k — скорость k -й точки.

Спроецировав правую и левую части уравнения главного вектора моментов количества движения на оси координат, получим

$$K_x = \sum_{k=1}^n m_k (y_k V_{kz} - z_k V_{ky}),$$

$$K_y = \sum_{k=1}^n m_k (z_k V_{kx} - x_k V_{kz}),$$

$$K_z = \sum_{k=1}^n m_k (x_k V_{ky} - y_k V_{kx}).$$

Запишем уравнение (2.4) для каждой точки системы с учетом наличия внешних и внутренних сил:

$$\sum_{k=1}^n \frac{dK_{O_k}}{dt} = \sum_{k=1}^n M_{O_k}^{(e)}(F) + \sum_{k=1}^n M_{O_k}^{(i)}(F).$$

Тогда

$$\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n K_{O_k} = \sum_{k=1}^n M_{O_k}^{(e)}(F),$$

так как $\sum_{k=1}^n M_{O_k}^{(i)}(F) = 0$.

Таким образом, *полная производная по времени главного вектора количества движения материальной системы, вычисленного относительно неподвижного центра, равна главному моменту всех внешних сил относительно того же центра:*

$$\frac{d\mathbf{K}_O}{dt} = \mathbf{M}_O^{(e)}.$$

В проекциях на оси координат

$$\frac{dK_{Ox}}{dt} = M_{Ox}^{(e)}, \quad \frac{dK_{Oy}}{dt} = M_{Oy}^{(e)}, \quad \frac{dK_{Oz}}{dt} = M_{Oz}^{(e)}.$$

4. Закон сохранения энергии.

Запишем основной закон динамики (1.1) в виде $m dV = F dt$.

Умножим это соотношение скалярным образом на V :

$$mV dV = V \cdot F dt,$$

затем преобразуем к виду

$$md\left(\frac{V^2}{2}\right) = F \cdot V dt,$$

отсюда с учетом $V dt = dr$ следует

$$d\left(\frac{mV^2}{2}\right) = F dr. \quad (2.5)$$

Величина $T = \frac{mV^2}{2}$ называется *кинетической энергией точки* массой m , движущейся со скоростью V .

Величина $\tilde{d}A = F \cdot dr$ называется *элементарной работой силы F* , приложенной к точке на пути dr .

Таким образом, формула (2.5) представляет выражение закона изменения кинетической энергии: изменение кинетической энергии равно элементарной работе силы F на пути dr :

$$dT = \tilde{d}A.$$

Здесь знак \sim означает, что для произвольной силы F $\tilde{d}A$ не является полным дифференциалом.

Работа на конечном пути за конечное время определяется криволинейным интегралом 2-го рода:

$$A = \int_{M_0}^{M_1} \tilde{d}A = \int_{M_0}^{M_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{M_0}^{M_1} F_x dx + F_y dy + F_z dz = \int_0^t dT = T(t) - T(0). \quad (2.6)$$

Таким образом, конечное изменение кинетической энергии $(T(t) - T(0))$ равно конечной работе A , совершенной силой \mathbf{F} .

Если траектория движения точки задана параметрически: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, то (2.6) имеет вид

$$T(t) - T(0) = A = \int_0^t (F_x \dot{x} + F_y \dot{y} + F_z \dot{z}) dt = \int_0^t \mathbf{F} \cdot \mathbf{V} dt = \int_0^t W_1 dt, \quad W_1 = \dot{A}.$$

Выражение $P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{V} = \dot{A}$ называется *мощностью работы силы \mathbf{F}* , так как определяет работу, совершаемую за единицу времени.

Рассмотрим систему материальных точек, для каждой из которых запишем формулу (2.5):

$$d\left(\frac{m_k V_k^2}{2}\right) = \mathbf{F}_k \cdot d\mathbf{r}_k$$

и просуммируем по k , тогда получим изменение кинетической энергии для системы материальных точек

$$dT = \sum_{k=1}^n dT_k = d \sum_{k=1}^n \left(\frac{m_k V_k^2}{2}\right) = \sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k \cdot d\mathbf{r}_k = \sum_{k=1}^n \tilde{d}A_k.$$

Если представить $\mathbf{F}_k = \mathbf{F}_k^{(e)} + \mathbf{F}_k^{(i)}$, то в правой части полученного уравнения имеем

$$\sum_{k=1}^n \tilde{d}A_k = \sum_{k=1}^n \tilde{d}A_k^{(e)} + \sum_{k=1}^n \tilde{d}A_k^{(i)} = \tilde{d}A^{(e)} + \tilde{d}A^{(i)},$$

где $\sum_{k=1}^n \tilde{d}A_k^{(e)}$ — элементарная работа, совершаемая всеми внеш-

ними силами; $\sum_{k=1}^n \tilde{d}A_k^{(i)}$ — элементарная работа, совершаемая

всеми внутренними силами.

Таким образом, дифференциал кинетической энергии системы равен в общем случае элементарной работе всех сил системы:

$$dT = \tilde{d}A^{(e)} + \tilde{d}A^{(i)} = dA. \quad (2.7)$$

Так как перемещения взаимодействующих точек могут быть не равны, то

$$\sum_{k=1}^n \tilde{d}A_k^{(i)} \neq 0$$

в общем случае. Если расстояния между точками системы не изменяются или тело абсолютно жесткое, то

$$\sum_{k=1}^n \tilde{d}A_k^{(i)} = 0,$$

тогда

$$dT = \tilde{d}A^{(e)}.$$

Интегральную форму закона об изменении кинетической энергии получим, проинтегрировав (2.7):

$$\int_{T_1}^{T_2} dT = \sum_{k=1}^n \int_{M_{1k}}^{M_{2k}} \tilde{d}A_k^{(e)} + \sum_{k=1}^n \int_{M_{1k}}^{M_{2k}} \tilde{d}A_k^{(i)}. \quad (2.8)$$

Если траектории перемещений точек системы заданы параметрически: $r_k = r_k(t)$, то из (2.8) получаем

$$\begin{aligned} T_2 - T_1 &= \int_{t_1}^{t_2} \tilde{d}A^{(e)} + \int_{t_1}^{t_2} \tilde{d}A^{(i)} = \int_{t_1}^{t_2} \dot{A}^{(e)} dt + \int_{t_1}^{t_2} \dot{A}^{(i)} dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} W_1^{(e)} dt + \int_{t_1}^{t_2} W_1^{(i)} dt. \end{aligned}$$

Таким образом, изменение кинетической энергии системы за конечное время равно работе всех сил системы за то же время.

Потенциальные силы определяются следующим образом:

$$F_{kx}^{(e)} = -\frac{\partial \Pi_k^{(e)}}{\partial x_k}, \quad F_{ky}^{(e)} = -\frac{\partial \Pi_k^{(e)}}{\partial y_k}, \quad F_{kz}^{(e)} = -\frac{\partial \Pi_k^{(e)}}{\partial z_k},$$

где $\Pi_k^{(e)}$ — потенциальная энергия внешней силы $F_k^{(e)}$.

$$F_{kx}^{(i)} = -\frac{\partial \Pi_k^{(i)}}{\partial x_k}, \quad F_{ky}^{(i)} = -\frac{\partial \Pi_k^{(i)}}{\partial y_k}, \quad F_{kz}^{(i)} = -\frac{\partial \Pi_k^{(i)}}{\partial z_k}.$$

Здесь $\Pi_k^{(i)}$ — потенциальная энергия внутренней силы $F_k^{(i)}$.

Тогда $\tilde{d}A_k^{(e)}$ и $\tilde{d}A_k^{(i)}$ будут полными дифференциалами, поэтому можно записать

$$dA_k^{(e)} = -\left(\frac{\partial \Pi_k^{(e)}}{\partial x_k} dx_k + \frac{\partial \Pi_k^{(e)}}{\partial y_k} dy_k + \frac{\partial \Pi_k^{(e)}}{\partial z_k} dz_k \right) = -d\Pi_k^{(e)},$$

$$dA_k^{(i)} = -\left(\frac{\partial \Pi_k^{(i)}}{\partial x_k} dx_k + \frac{\partial \Pi_k^{(i)}}{\partial y_k} dy_k + \frac{\partial \Pi_k^{(i)}}{\partial z_k} dz_k \right) = -d\Pi_k^{(i)}.$$

Суммируя по k полученные выражения, находим:

$$dA = dA^{(e)} + dA^{(i)} = -(d\Pi^{(e)} + d\Pi^{(i)}) = -d\Pi, \quad (2.9)$$

где Π — полная потенциальная энергия системы.

Из (2.7) и (2.9) следует

$$d(T + \Pi) = 0. \quad (2.10)$$

Величина $E = T + \Pi$ называется *полной механической энергией системы*. Проинтегрировав (2.10), получим закон сохранения энергии системы: полная механическая энергия системы постоянна, если все силы системы потенциальные и потенциальная энергия не зависит от времени:

$$E = T + \Pi = \text{const}. \quad (2.11)$$

Выражение (2.11) называется *интегралом энергии*.

Если к данной системе добавить непотенциальные силы, работа которых на действительных перемещениях равна нулю,

то для такой системы закон сохранения энергии будет выполняться (например, добавление реакций идеальных связей не повлияет на закон сохранения энергии).

2.2. Решение типовых задач

Задача 1. К ползуну *I* массой M_1 посредством тонкой невесомой нити длиной l прикреплен груз *II* массой M_2 (рис. 2.1). При колебаниях груза по закону $\varphi = \varphi_0 \sin \omega t$ ползун скользит по неподвижной горизонтальной гладкой поверхности. Найти уравнение движения ползуна $x_1 = f(t)$, считая, что в начальный момент ($t = 0$) ползун находился в начале отсчета O оси x .

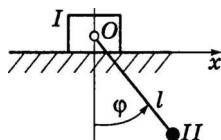


Рис. 2.1

Решение.

На рис. 2.2 изображены силы, действующие на ползун и груз. Запишем теорему о движении центра масс системы в проекции на ось x . $M\ddot{x}_C = \sum F_{kx}^e = 0$, так как внешние силы перпендикулярны оси x . Следовательно,

$$\ddot{x}_C = 0 \Rightarrow \dot{x}_C = \text{const},$$

при $t = 0$

$$\dot{x}_{C0} = 0 \Rightarrow x_C = \text{const},$$

а значит $x_{C1} = x_{C2}$, где x_{C1} — положение центра масс системы в момент $t = 0$; x_{C2} — положение центра масс системы в момент $t > 0$, $x_{C1} = 0$, так как нить с грузом расположена вертикально.

$$x_{C2} = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k} = \frac{M_1 x_1 + M_2 x_2}{M_1 + M_2} = \frac{M_1 x_1 + M_2 (l \sin \varphi + x_1)}{M_1 + M_2},$$

где x_1 — перемещение ползуна; $x_2 = x_1 + l \sin \varphi$ — перемещение груза по горизонтали, которое происходит вместе с ползуном.

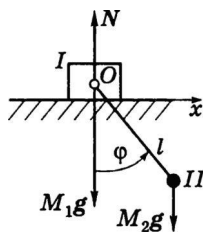


Рис. 2.2

Тогда

$$x_{C_1} = x_{C_2} = 0 = \frac{M_1 x_1 + M_2 (x_1 + l \sin \varphi)}{M_1 + M_2} \Rightarrow$$

$$M_1 x_1 + M_2 x_1 + M_2 l \sin \varphi = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{-M_2 l \sin \varphi}{M_1 + M_2}.$$

Подставив φ , получим

$$x_1 = -\frac{M_2 l \sin(\varphi_0 \sin \omega t)}{M_1 + M_2}.$$

О т в е т: $x_1 = -\frac{M_2}{M_1 + M_2} l \sin(\varphi_0 \sin \omega t)$.

Задача 2. На рессорах вагон трамвая совершает вертикальные гармонические колебания амплитудой $a = 2,5$ см и периодом $T = 0,5$ с (рис. 2.3). Масса кузова с нагрузкой — 10 т, масса тележки и колес — 1 т. Определить силу давления вагона на рельсы.

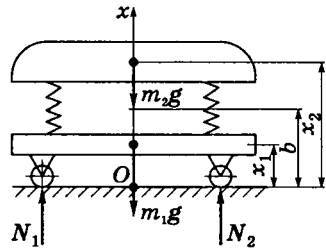


Рис. 2.3

Решение.

Применим теорему о движении центра масс системы:

$$M a_C = (m_1 + m_2)g + N_1 + N_2,$$

где $M = m_1 + m_2$; $N_1 + N_2 = N$.

В проекции на ось x $(m_1 + m_2)\ddot{x}_C = -(m_1 + m_2)g + N$.

Отсюда $N = (m_1 + m_2)(g + \ddot{x}_C)$.

Найдем уравнение движения центра масс всей системы:

$$x_C = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2},$$

где $x_1 = \text{const}$; $x_2 = a \sin \omega t + b$, где b — точка, около которой вагон совершает колебания. Так как вагон совершает вертикальные гармонические колебания, $b = \text{const}$.

Частота колебаний

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,5} = 4\pi \text{ рад/с.}$$

Амплитуда колебаний $a = 2,5 \text{ см} = 0,025 \text{ м}$.

Найдем ускорение центра масс системы:

$$\ddot{x}_C = \frac{\ddot{x}_2 m_2}{m_1 + m_2} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} a \omega^2 \sin \omega t.$$

Так как $|\sin \omega t| \leq 1$, то

$$\ddot{x}_{C \max} = \pm \frac{m_2 a \omega^2}{m_1 + m_2}.$$

В зависимости от знака ускорения центра масс давление будет минимальным или максимальным.

$$\begin{aligned} N_{\max} &= (m_1 + m_2)g + m_2 a \omega^2 = (1 + 10) \cdot 10^3 \cdot 9,8 + 10 \cdot 10^3 \cdot 0,025 \cdot 16\pi^2 = \\ &= 107,8 \cdot 10^3 + 39,5 \cdot 10^3 = 147,3 \text{ кН.} \end{aligned}$$

$$N_{\min} = (m_1 + m_2)g - m_2 a \omega^2 = 107,8 \cdot 10^3 - 39,5 \cdot 10^3 = 68,3 \text{ кН.}$$

О т в е т: от 68,3 до 147,3 кН.

Задача 3. Вычислить главный момент количества движения планетарной передачи относительно неподвижной оси z , совпадающей с осью вращения кривошипа OC_3 , если неподвижное колесо 1 и подвижное колесо 3 — одинакового радиуса r (рис. 2.4). Масса колеса 3 равна m ; колесо 2 массой m_2 имеет радиус r_2 ; кривошип вращается с угловой скоростью, проекция которой на ось z равна ω_2 . Массой кривошипа пренебречь. Колеса считать однородными дисками.

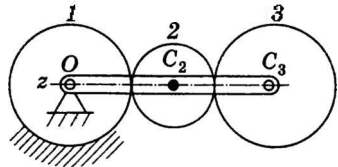


Рис. 2.4

Решение.

$$V_{C_2} = \dot{V}_2 = (r+r_2)\omega_z \quad (\text{рис. 2.5}),$$

$$\omega_2 = \frac{r+r_2}{r_2} \omega_z,$$

$$V_D = 2(r+r_2)\omega_z,$$

$$V_{C_3} = V_3 = (2r+2r_2)\omega_z,$$

так как $V_3 = V_D$, то $\omega_3 = 0$.

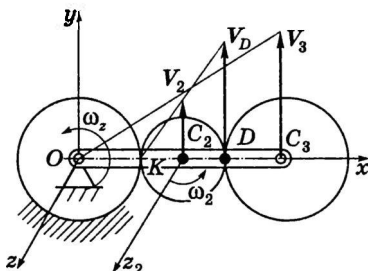


Рис. 2.5

Так как оси вращения колес планетарного редуктора параллельны, то значение главного момента количества движения всего редуктора находим как алгебраическую сумму:

$$K_{Oz} = K_{2Oz} + K_{3Oz}.$$

Главный момент количества движения колеса 2, совершающего сложное движение (переносное и относительное),

$$K_{2Oz} = K_{2Oz}^{\text{пер}} + K_{2Oz}^{\text{отн}};$$

$$K_{2Oz}^{\text{пер}} = M_{Oz}(m_2 V_{C_2}) = m_2(r+r_2)^2 \omega_z;$$

$$K_{2Oz}^{\text{отн}} = I_{C_2} \omega_2 = I_{C_2} \frac{r+r_2}{r_2} \omega_z = \frac{m_2 r_2^2}{2} \frac{r+r_2}{r_2} \omega_z = \frac{m_2 r_2 (r+r_2)}{2} \omega_z;$$

$$K_{2Oz} = m_2(r+r_2)^2 \omega_z + \frac{m_2 r_2 (r+r_2)}{2} \omega_z = m_2(r+r_2) \omega_z \frac{2r+3r_2}{2}.$$

Главный вектор момента количества движения колеса Z , совершающего только поступательное движение,

$$K_{3O_z} = M_{O_z}(mV_{C_3}) = m4(r+r_2)^2\omega_z.$$

Значение главного вектора момента количества движения для редуктора

$$\begin{aligned} K_{O_z} &= m_2(r+r_2)\omega_z\left(\frac{2r+3r_2}{2}\right) + 4m(r+r_2)^2\omega_z = \\ &= \frac{m_2(2r+3r_2)+8m(r+r_2)}{2}(r+r_2)\omega_z. \end{aligned}$$

О т в е т: $K_{O_z} = \frac{m_2(2r+3r_2)+8m(r+r_2)}{2}(r+r_2)\omega_z.$

Задача 4. Шарик A , находящийся в сосуде с жидкостью и прикрепленный к концу стержня AB длиной l , приводится во вращение вокруг вертикальной оси O_1O_2 с начальной угловой скоростью ω_0 (рис. 2.6). Сила сопротивления жидкости R прямо пропорциональна угловой скорости вращения: $R = \alpha t\omega$, где α — коэффициент пропорциональности; m — масса шарика.

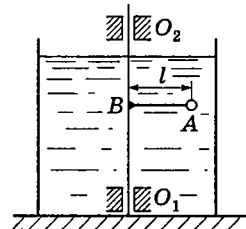


Рис. 2.6

Определить, через какой промежуток времени угловая скорость вращения станет в два раза меньше начальной, а также число оборотов N , которое сделает стержень с шариком за этот промежуток времени. Массу шарика считать сосредоточенной в его центре, массой стержня пренебречь.

Р е ш е н и е.

Исследуем движение шарика A , прикрепленного посредством стержня AB к вертикальной оси O_1O_2 под действием приложенных активных сил: силы тяжести mg , силы сопротивления R и сил реакций связей в опорах O_1 и O_2 . Для реше-

ния задачи воспользуемся теоремой об изменении главного момента количества движения твердого тела:

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum M_z(F_k^{(e)}),$$

где $M_z(F_k^{(e)}) = -Rl = -\alpha lm\omega$, $K_z = M_z(mV) = ml^2\omega$.

Тогда

$$\frac{d(ml^2\omega)}{dt} = -\alpha lm\omega \quad \text{или} \quad l \frac{d\omega}{dt} = -\alpha\omega.$$

Разделим переменные и проинтегрируем полученное равенство:

$$l \int_{\omega_0}^{\frac{\omega_0}{2}} \frac{d\omega}{\omega} = -\alpha \int_0^t dt, \quad -l \ln 2 = -\alpha t.$$

Найдем искомую величину:

$$t = \frac{l}{\alpha} \ln 2.$$

Для нахождения числа оборотов N воспользуемся подстановкой

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\omega d\omega}{d\varphi}.$$

Тогда исходное дифференциальное уравнение движения системы будет иметь вид

$$l \frac{d\omega}{d\varphi} = -\alpha.$$

Разделим переменные и проинтегрируем:

$$l \int_{\omega_0}^{\frac{\omega_0}{2}} d\omega = -\alpha \int_0^{\varphi} d\varphi, \quad -l \frac{\omega_0}{2} = -\alpha\varphi,$$

$$\varphi = \frac{l}{\alpha} \frac{\omega_0}{2}, \quad N = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{l\omega_0}{4\alpha\pi}.$$

О т в е т: $t = \frac{l}{\alpha} \ln 2, \quad N = \frac{l\omega_0}{4\alpha\pi}.$

Задача 5. Планетарный механизм, расположенный в горизонтальной плоскости, приводится в движение кривошипом OA , соединяющим оси трех одинаковых колес I, II, III (рис. 2.7). Колесо I неподвижно; кривошип вращается с угловой скоростью ω . Масса каждого из колес равна M_1 , радиус каждого из колес — r , масса кривошипа — M_2 .

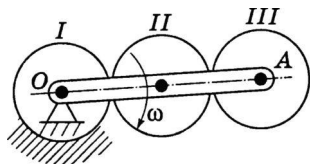


Рис. 2.7

Вычислить кинетическую энергию механизма, считая колеса однородными дисками, а кривошип — однородным стержнем. Чему равна работа пары сил, приложенной к колесу III ?

Р е ш е н и е.

Рассмотрим движение планетарного механизма. Изобразим расчетную схему. Определим характер движения всех частей механизма. Кривошип OA совершает вращательное движение $V_B = \omega OB = 2\omega r$, $V_A = \omega OA = 4\omega r$. Колесо II совершает плоскопараллельное движение. Мгновенный центр скоростей колеса II лежит в точке P .

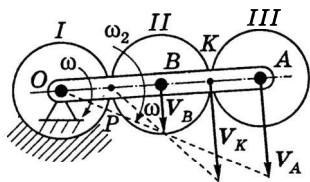


Рис. 2.8

Угловая скорость колеса II

$$\omega_2 = \frac{V_B}{BP} = \frac{2\omega r}{r} = 2\omega.$$

Скорость точки K колеса II

$$V_K = \omega_2 PK = 2\omega \cdot 2r = 4\omega r.$$

Рассмотрим движение колеса *III*. Скорости точек *K* и *A* (V_K и V_A) равны и параллельны, следовательно, колесо *III* совершает поступательное движение со скоростью $V_K = V_A = 4\omega r$.

Кинетическая энергия механизма равна

$$T = T_{OA} + T_{II} + T_{III},$$

где

$$T_{OA} = \frac{1}{2} I_0 \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{3} M_2 O A^2 \omega^2 = \frac{M_2 16 r^2}{6} \omega^2 = \frac{8 M_2 r^2}{3} \omega^2;$$

$$T_{II} = \frac{1}{2} M_1 V_B^2 + \frac{1}{2} J_B \omega_2^2 = \frac{1}{2} M_1 4 \omega^2 r^2 + \frac{1}{2} \frac{M_1 r^2}{2} 4 \omega^2 = 3 M_1 \omega^2 r^2;$$

$$T_{III} = \frac{1}{2} M_1 V_A^2 = \frac{1}{2} M_1 16 \omega^2 r^2 = 8 M_1 \omega^2 r^2.$$

Тогда

$$T = \frac{2 M_2 r^2 \omega^2}{3} + 3 M_1 \omega^2 r^2 + 8 M_1 \omega^2 r^2 = \frac{8 M_2 + 33 M_1}{3} \omega^2 r^2.$$

О т в е т: $T = \frac{r^2 \omega^2}{3} (33 M_1 + 8 M_2)$; работа равна нулю.

Задача 6. В кулачковом механизме, расположенном в горизонтальной плоскости, эксцентрик *A* приводит в возвратно-поступательное движение ролик *B* со штангой *D* (рис. 2.9). Пружина *E*, соединенная со штангой, обеспечивает постоянный контакт ролика с эксцентриком. Масса эксцентрика равна M , эксцентриситет e равен половине его радиуса; коэффициент упругости пружины равен c . При крайнем левом положении штанги пружина не напряжена.

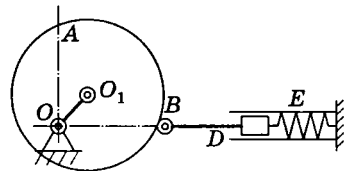


Рис. 2.9

Какую угловую скорость надо сообщить эксцентрику, для того чтобы он переместил штангу *D* из крайнего левого положения в крайнее правое? Массой ролика, штанги и пружины пренебречь. Эксцентрик считать однородным круглым диском.

Р е ш е н и е.

Рассмотрим движение кулачкового механизма в горизонтальной плоскости. Изобразим расчетную схему и покажем на ней начальное и конечное положение механизма.

При этом эксцентрик A повернется на угол $\varphi = \pi$ рад, и ролик B со штангой D переместится на величину, равную $2e = r$. Применим теорему об изменении кинетической энергии механической системы:

$$T - T_0 = \sum A_k^{(e)} + \sum A_k^{(i)}.$$

Система неизменяема, поэтому и работа внутренних сил

$$\sum A_k^{(i)} = 0.$$

В конечном положении система остановилась, ее кинетическая энергия $T = 0$.

Найдем кинетическую энергию системы в начальном положении. Так как при решении задачи учитывалась только масса эксцентрика, то $T_0 = T_A$.

Кинетическая энергия эксцентрика A , совершающего вращательное движение вокруг оси, проходящей через точку O ,

$$T_A = \frac{1}{2} I_0 \omega_0^2 = \frac{1}{2} (I_0 + M e^2) \omega_0^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{Mr^2}{2} + M \left(\frac{r}{2} \right)^2 \right] \omega_0^2 = \frac{3Mr^2}{8} \omega_0^2.$$

Механизм перемещается в горизонтальной плоскости, поэтому сила тяжести эксцентрика работу не совершает.

Работу будет совершать только сила упругости пружины $F_{\text{упр}}$:

$$\sum A_k^e = A_{\text{упр}} = - \int_0^r c x dx = - \frac{cr^2}{2}.$$

Подставим полученные значения в уравнение и найдем искомую скорость ω :

$$-\frac{3Mr^2}{8} \omega^2 = -\frac{cr^2}{2}, \quad \omega = 2\sqrt{\frac{c}{3M}}.$$

О т в е т: $\omega = 2\sqrt{\frac{c}{3M}}.$

Основные законы динамики в неинерциальных системах

2.3. Отсчета

В теоретической механике рассматриваются явления, связанные с геометрическими аспектами движения. Это позволяет в механических моделях окружающего мира представлять явления, происходящие в нем, точками (множествами точек) четырехмерного пространства, полученного из физического трехмерного пространства добавлением измерения, отражающего ход времени. Отношение времени как особой координаты к геометрическим объектам задается с помощью галилеевой пространственно-временной структуры. Следовательно, имеет место **принцип относительности Галилея**: при изучении законов движения все инерциальные (т.е. движущиеся равномерно и поступательно) системы отсчета равноправны. Это значит, что при проведении опытов в инерциальной системе отсчета невозможно обнаружить движение таких систем.

Рассмотрим две системы координат (рис. 2.10). Одна из них $OXYZ$ неподвижна, вторая O_1xyz подвижна, т.е. неинерциальна. Систему $OXYZ$ и движение точки (системы точек, тела) относительно нее (т.е. скорости и ускорения) будем называть **абсолютными**.

Движение точки, системы точек и тела (соответственно скорости и ускорения) относительно системы O_1xyz называется **относительным**. Движение точки (системы точек) вместе с системой O_1xyz относительно $OXYZ$ называется **переносным**.

Рассмотрим движение механической системы в произвольной неинерциальной системе отсчета, движущейся относительно некоторой абсолютной системы отсчета. Докажем теорему

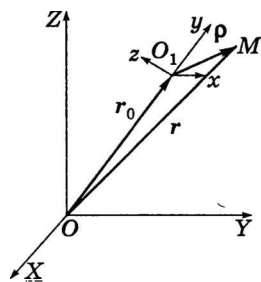


Рис. 2.10

Кориолиса, связывающую ускорение в абсолютной и подвижной системах координат согласно формуле

$$W_{ak} = W_{rk} + W_{ek} + W_{ck}, \quad (2.12)$$

где W_{ak} — абсолютное, W_{rk} — относительное, W_{ek} — переносное, W_{ck} — кориолисово ускорение k -й точки системы.

Подставив (2.12) в основное уравнение динамики системы (1.3), преобразовав и введя обозначения, получим

$$m_k W_{rk} = F_k^{(e)} + F_k^{(i)} + J_{ek} + J_{ck}, \quad (2.13)$$

где $J_{ek} = -m_k W_{ek}$, $J_{ck} = -m_k W_{ck} = -2m\omega \times V_{rk}$ — переносная и кориолисова силы инерции соответственно; ω — угловая скорость переносного движения.

Таким образом, основные уравнения динамики Ньютона (2.13) для неинерциальной системы отсчета содержат в правой части дополнительные силы инерции, обусловленные переносным и кориолисовым ускорениями точек.

Закон сохранения массы $M = \sum m_i$ для систем постоянного состава записывается так же, как и для систем, движущихся со скоростями, значительно меньшими скорости света.

Закон сохранения (баланса) количества движения в неинерциальной системе отсчета имеет вид

$$\frac{dQ_r}{dt} = R^{(e)} + J_e + J_c, \quad (2.14)$$

где $Q_r = \sum_{k=1}^n m_k V_{rk}$, $R^{(e)}$ — главный вектор внешних сил, прило-

женных к системе; $J_e = \sum_{k=1}^n J_{ek}$ — главный вектор переносных

сил инерции; $J_c = \sum_{k=1}^n J_{ck}$ — главный вектор кориолисовых сил

инерции.

Закон изменения (баланса) кинетического момента для неподвижного в неинерциальной системе отсчета центра A имеет вид

$$\frac{d\mathbf{K}_{Ar}}{dt} = \mathbf{M}_A^{(e)} + \mathbf{M}_{AJe} + \mathbf{M}_{AJc}, \quad (2.15)$$

где $\mathbf{K}_{Ar} = \sum_{k=1}^n \boldsymbol{\rho}_k \times m_k \mathbf{V}_{rk}$, $\boldsymbol{\rho}_k$ — радиус-вектор точки P_k относительно центра A ; $\mathbf{M}_A^{(e)}$ — главный вектор внешних сил, приложенных к системе, относительно точки A ; \mathbf{M}_{AJe} и \mathbf{M}_{AJc} — главные моменты переносных и кориолисовых сил инерции относительно точки A .

Закон изменения кинетической энергии имеет вид

$$dT_r = \tilde{d}A^{(e)} + \tilde{d}A^{(i)} + \tilde{d}A_{Je}, \quad (2.16)$$

где $T_r = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k V_{rk}^2$ — кинетическая энергия; $\tilde{d}A^{(e)}$, $\tilde{d}A^{(i)}$ — соответственно элементарная работа внешних и внутренних сил, приложенных к системе на относительных перемещениях $d\boldsymbol{\rho}_k$ ее точек; $\tilde{d}A_{Je}$ — элементарная работа переносных сил на тех же перемещениях.

Работа кориолисовых сил равна нулю, так как сила $\mathbf{J}_{ck} \perp d\boldsymbol{\rho}_k$:

$$\tilde{d}A^{(e)} = \sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k^{(e)} d\boldsymbol{\rho}_k,$$

$$\tilde{d}A^{(i)} = \sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k^{(i)} d\boldsymbol{\rho}_k,$$

$$\tilde{d}A_{Je} = \sum_{k=1}^n \mathbf{J}_{ek} d\boldsymbol{\rho}_k,$$

$$\tilde{d}A_{Jc} = \sum_{k=1}^n \mathbf{J}_{ck} d\boldsymbol{\rho}_k = 0.$$

В кениговой системе координат, подвижной системе, начало которой находится в центре масс системы, движущейся поступательно относительно абсолютной системы, законы сохранения (баланса) массы, количества движения, кинетического момента и кинетической энергии записываются точно так же, как и в инерциальной, т.е. члены в правой части (2.14), (2.15), (2.16), обусловленные инерциальными членами, обращаются в ноль:

$$\mathbf{J}_e = \mathbf{J}_c = 0, \quad \mathbf{M}_{AJe} = \mathbf{M}_{AJc} = 0, \quad \tilde{d}A_{Je} = 0.$$

2.4. Принцип Даламбера для материальной точки и для системы материальных точек

Связями называются ограничения, наложенные на движение точки, системы материальных точек и тела. Их действие проявляется в виде дополнительных сил, называемых *реакциями связей*, которые, как правило, неизвестны.

Если на систему не наложены связи, то она называется *свободной*.

Рассмотрим еще одну форму основного уравнения динамики, известную как *принцип Даламбера*.

Запишем основное уравнение динамики, выделив в правой части реакции связей \mathbf{R} из внешних сил:

$$m\mathbf{W} = \mathbf{F} + \mathbf{R}, \quad (2.17)$$

где \mathbf{W} — ускорение точки относительно инерциальной системы отсчета; \mathbf{F} — равнодействующая активных сил; \mathbf{R} — равнодействующая реакций связей.

Выражение $m\mathbf{W} = \mathbf{J}$ называется *силой инерции*. Подставляя его в (2.17), получим

$$\mathbf{F} + \mathbf{R} + \mathbf{J} = 0. \quad (2.18)$$

Уравнение (2.18) выражает *принцип Даламбера для точки*: при движении материальной точки активные силы и реак-

ции связей вместе с силой инерции точки образуют равновесную систему сил (геометрическая сумма сил равна нулю).

Для систем материальных точек принцип Даламбера имеет вид

$$\mathbf{F}_k + \mathbf{R}_k + \mathbf{J}_k = 0, \quad k = 1, \dots, n, \quad (2.19)$$

т.е. при движении механической системы активная сила и реакция связей вместе с силой инерции составляют равновесную систему сил для каждой точки системы.

Таким образом, принцип Даламбера по содержанию не отличается от уравнений движения материальной точки и системы материальных точек, но для решения многих задач он предпочтительнее.

Представим равнодействующую силу, приложенную к каждой точке системы и разложенную не на активную силу и реакцию связей, а на внутреннюю и внешнюю силы по отношению ко всей системе:

$$\mathbf{F}_k + \mathbf{R}_k = \mathbf{F}_k^{(e)} + \mathbf{F}_k^{(i)}.$$

Тогда принцип Даламбера для системы можно записать как

$$\mathbf{F}_k^{(e)} + \mathbf{F}_k^{(i)} + \mathbf{J}_k = 0, \quad k = 1, \dots, n, \quad (2.20)$$

где $\mathbf{F}_k^{(e)}$ — внешние силы; $\mathbf{F}_k^{(i)}$ — внутренние силы.

Следствия из принципа Даламбера.

1. Просуммировав (2.20), получим

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k^{(e)} + \sum_{k=1}^n \mathbf{J}_k = 0, \quad \sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k^{(i)} = 0. \quad (2.21)$$

Так как

$$\sum_{k=1}^n m_k \mathbf{W}_k = \sum_{k=1}^n m_k \frac{d\mathbf{V}_k}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n \mathbf{Q}_k = \frac{d\mathbf{Q}}{dt}, \quad \sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k^{(e)} = \mathbf{R}^{(e)},$$

то из (2.21) следует

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \mathbf{R}^{(e)}. \quad (2.22)$$

Формула (2.22) выражает закон сохранения (изменения) количества движения.

2. Умножив в (2.20) векторно на r_k и просуммировав, получим

$$\sum_{k=n}^n M_O(F_k^{(e)}) + \sum_{k=n}^n M_O(J_k) = 0, \quad \sum_{k=n}^n M_O(F_k^{(i)}) = 0. \quad (2.23)$$

Так как

$$\sum_{k=n}^n M_O(J_k) = \sum_{k=n}^n r_k \times m_k V_k = K_O, \quad \sum_{k=n}^n M_O(F_k^{(e)}) = M_O^{(e)},$$

то (2.22) запишется в виде закона сохранения (изменения) кинетического момента:

$$\frac{dK_O}{dt} = M_O^{(e)}.$$

3. Умножим (2.20) скалярно на dr_k и просуммируем:

$$\sum_{k=1}^n F_k^{(e)} \cdot dr_k + \sum_{k=1}^n F_k^{(i)} \cdot dr_k + \sum_{k=1}^n J_k \cdot dr_k = 0$$

или

$$\sum_{k=1}^n \tilde{d}A_k^{(e)} + \sum_{k=1}^n \tilde{d}A_k^{(i)} + \sum_{k=1}^n \tilde{d}A_k^J = 0. \quad (2.24)$$

Запишем закон об изменении кинетической энергии системы в виде

$$dT = \sum_{k=1}^n \tilde{d}A_k^{(e)} + \sum_{k=1}^n \tilde{d}A_k^{(i)}. \quad (2.25)$$

Если сравнить (2.24) и (2.25), то

$$\sum_{k=1}^n \tilde{d}A_k^J = -dT. \quad (2.26)$$

Проинтегрировав (2.26), найдем

$$-(T - T_0) = \sum_{k=1}^n A_k^J.$$

Таким образом, сумма работ сил инерции на каком-либо перемещении системы равна изменению кинетической энергии на этом перемещении, взятому с обратным знаком. Следовательно, принцип Даламбера эквивалентен аксиомам Ньютона, поэтому и из него можно получить основные законы механики.

Рассмотрим решение задач динамики методами с использованием сил инерции — *кинетостатическими методами*.

Задача 1. Центр масс махового колеса массой 3000 кг находится на расстоянии 1 мм от горизонтальной оси вала; расстояния подшипников от колеса равны между собой. Найти силы давления на подшипники, когда вал совершает $n = 1200$ об./мин. Маховик имеет плоскость симметрии, перпендикулярную оси вращения.

Решение.

Угловая скорость маховика

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = 40\pi \text{ рад/с.}$$

На подшипники действуют сила тяжести и центробежная сила инерции $\Phi_{ц}$, возникающая вследствие эксцентриситета k (рис. 2.11). Поэтому реакции связей состоят из статических (см. рис. 2.11) и динамических (рис. 2.12, а):

$$\mathbf{R}_B = \mathbf{R}_B^{ст} + \mathbf{R}_B^д; \quad \mathbf{R}_D = \mathbf{R}_D^{ст} + \mathbf{R}_D^д.$$

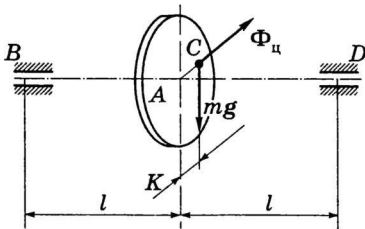


Рис. 2.11

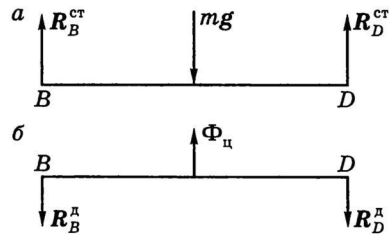


Рис. 2.12

Определим статические реакции. Составим уравнения равновесия:

$$\sum M_B(\mathbf{F}_k) = R_D^{\text{ст}} 2l - mgl = 0;$$

$$\sum M_D(\mathbf{F}_k) = -R_B^{\text{ст}} 2l + mgl = 0.$$

$$R_D^{\text{ст}} = \frac{mg}{2} = 14\,700 \text{ Н};$$

$$R_B^{\text{ст}} = \frac{mg}{2} = 14\,700 \text{ Н}.$$

Определим динамические реакции.

Учтем, что $\Phi_{\text{ц}} = ma_C = m\omega^2 k = 47\,200 \text{ Н}$, где a_C — ускорение центра масс C .

Составим уравнения равновесия (рис. 2.12, б):

$$\sum M_B(\mathbf{F}_k) = \Phi_{\text{ц}} l - R_D^{\text{д}} 2l = 0 \Rightarrow R_D^{\text{д}} = \frac{\Phi_{\text{ц}}}{2};$$

$$\sum M_D(\mathbf{F}_k) = R_B^{\text{д}} 2l - \Phi_{\text{ц}} l = 0 \Rightarrow R_B^{\text{д}} = \frac{\Phi_{\text{ц}}}{2}.$$

$$R_D^{\text{д}} = R_B^{\text{д}} = 23\,600 \text{ Н}.$$

Динамические реакции параллельны центробежной силе инерции $\Phi_{\text{ц}}$.

О т в е т: сила давления на каждый из подшипников есть равнодействующая двух сил, одна из которых равна 14,7 кН и направлена по вертикали, а другая равна 23,6 кН и направлена параллельно прямой, соединяющей геометрический центр колеса, находящийся на оси вала, с центром масс колеса.

Задача 2. Однородный круглый диск массой m равномерно вращается с угловой скоростью ω вокруг неподвижной оси, расположенной в плоскости диска и отстоящей от его центра масс C на расстоянии $OC = a$ (рис. 2.13). Определить силы

динамического давления оси на подпятник A и подшипник B , если $OB = OA$. Оси x и y неизменно связаны с диском.

Решение.

Покажем динамические реакции: X_A^A ; Y_A^A ; X_B^A ; Y_B^A .

Так как диск вращается равномерно, т.е. $\omega = \text{const}$, то ускорение центра масс C диска $a_C = \omega^2 OC = \omega^2 a$.

Тогда центробежная сила инерции, направленная по оси y , равна $\Phi_{\text{ц}} = m\omega^2 a$. Составим уравнения равновесия с учетом принципа Даламбера:

$$\begin{aligned}\sum X_k &= X_A^A + X_B^A = 0; \\ \sum Y_k &= Y_A^A + Y_B^A + \Phi_{\text{ц}} = 0. \\ \sum M_{x_1}(F_k) &= -\Phi_{\text{ц}} OA - Y_B^A AB = 0; \\ \sum M_{y_1}(F_k) &= X_B^A AB = 0.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}X_B^A &= 0; \quad X_A^A = 0; \\ Y_B^A &= -\frac{\Phi_{\text{ц}}}{2} = -\frac{M\omega^2 a}{2}; \quad Y_A^A = -\Phi_{\text{ц}} - Y_B^A = -\frac{m\omega^2 a}{2}.\end{aligned}$$

Тогда

$$Y_A = -Y_A^A = \frac{M\omega^2 a}{2}; \quad Y_B = -Y_B^A = \frac{M\omega^2 a}{2}.$$

Ответ: $X_A = X_B = 0$, $Y_A = Y_B = \frac{M\omega^2 a}{2}$.

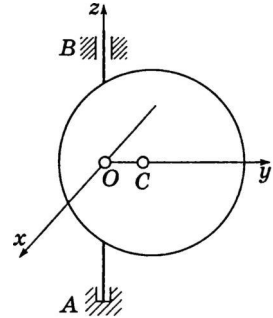


Рис. 2.13



ВАРИАЦИОННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ПРИНЦИПЫ МЕХАНИКИ

3.1. Действительные, возможные и виртуальные перемещения

Основные законы механики, сформулированные в гл. 2, устанавливают соотношения баланса между векторными величинами: изменение количества движения обусловлено силами, изменение момента количества движения — моментами сил, а изменение скалярных величин (кинетической и полной энергии) — работой сил. Эти законы могут быть положены в основу построения механики.

Существует подход, называемый *вариационным*, на основе которого может быть построена теория. Вариационные принципы механики базируются на вычислении работы, которая для действительных перемещений должна быть экстремальной.

Рассмотрим систему n материальных точек, характеризующихся радиусами-векторами r_k ($k = 1, \dots, n$), скоростями V_k и ускорениями W_k , на которую наложены связи. Связи означают, что точки несвободной системы не могут двигаться в пространстве произвольно.

Возможными положениями (конфигурациями) системы называют такие положения ее радиусов-векторов, которые совместимы с наложенными связями для данного момента времени. Соответственно *возможными скоростями и ускорениями* называют такие скорости и ускорения, которые совместимы для данного момента времени с наложенными связями.

Пусть в момент времени $t = t^*$ система находится в положении, определяемом r_k^* , V_k^* , W_k^* . Возможному положению системы в момент $t^* + \Delta t$ отвечают радиусы-векторы $r_k^* + \Delta r_k$. Величины Δr_k — это возможные перемещения системы за время Δt , которые можно представить в виде отрезка ряда Тейлора:

$$\Delta r_k = V_k^* \Delta t + \frac{1}{2} W_k^* (\Delta t)^2 + \dots$$

или

$$r_k(t + \Delta t) = r_k(t^*) + V_k^* \Delta t + \frac{1}{2} W_k^* (\Delta t)^2 + \dots$$

Если из основных уравнений динамики при заданных силах найти r_k^* , V_k^* , W_k^* , то эта формула определяет действительные (истинные) перемещения точек системы за время dt .

Помимо действительных перемещений, можно мысленно придавать системе бесконечно малые перемещения, совместимые со связями и в фиксированный момент времени $t = t^*$. Это означает, что изменение положения точек системы происходит не с течением времени под действием заданных сил, а мысленно при фиксированном $t = t^*$.

Такие перемещения системы будем называть *виртуальными* или *вариациями* и обозначать $\delta r_k = (\delta x_k, \delta y_k, \delta z_k)$. Очевидно, что виртуальных перемещений можно построить бесконечно много. Действительные перемещения принадлежат этому множеству.

Мысленный переход при фиксированном $t = t^*$ из положения системы, определяемого радиусами-векторами r_k^* , в бесконечно близкое положение, определяемое радиусами-векторами $r_k^* + \delta r_k$, называется *синхронным варьированием*. При синхронном варьировании не рассматривается процесс движения, а сравниваются допускаемые связями бесконечно близкие положения (конфигурации) системы в данный фиксированный момент времени.

Общее уравнение динамики

3.2. (принцип Даламбера — Лагранжа)

Рассмотрим систему n материальных точек P_k ($k=1, 2, \dots, n$) с параметрами $r_k, V_k, W_k, m_k, F_k, R_k$. Основное уравнение динамики для произвольной k -й точки имеет вид

$$m_k W_k = F_k + R_k, \quad k=1, 2, \dots, \quad (3.1)$$

где F_k — равнодействующая всех сил; R_k — равнодействующая всех реакций связей, приложенных к точке P_k .

Пусть связи R_k — идеальные, т.е. их работа на виртуальных перемещениях δr_k равна нулю:

$$\sum_{k=1}^n R_k \delta r_k = 0. \quad (3.2)$$

Умножив (3.1) скалярно на δr_k и просуммировав по k , с учетом (3.2) получим:

$$\sum_{k=1}^n (F_k - m_k W_k) \delta r_k = 0. \quad (3.3)$$

Соотношение (3.3) справедливо для любой системы с идеальными связями под действием активных сил F_k и с соответствующим для данного момента времени виртуальным перемещением δr_k .

Соотношение (3.3) называется *общим уравнением динамики*. Оно показывает, что в любой фиксированный момент времени сумма элементарных работ активных сил F_k и сил инерции $J_k = -m_k W_k$ на любых виртуальных перемещениях δr_k равна нулю.

Если связи неидеальные, то общее уравнение динамики запишется в виде

$$\sum_{k=1}^n (F_k + R_k - m_k W_k) \delta r_k = 0. \quad (3.4)$$

В общем случае реакции R_k или часть их неизвестны, поэтому необходимо добавить соотношения, дающие информацию о наложенных связях:

$$\begin{aligned} f_v(r_k, t) = 0, \quad \varphi_\mu(r_k, \dot{r}_k, t) = 0, \\ v = 1, \dots, r, \quad \mu = 1, \dots, \delta, \quad r + \delta = l. \end{aligned} \quad (3.5)$$

На первый взгляд общее уравнение динамики (3.4) является менее общим, чем система основных уравнений динамики (3.1). На самом деле соотношение (3.4) является не одним уравнением, а содержит в себе m уравнений, где m — число степеней свободы системы.

Действительно, пусть требуется решить прямую задачу динамики, т.е. найти $r_k = r_k(t)$ и неизвестные реакции R_k из системы $3n$ уравнений (3.1) и l уравнений связи (3.5). Число неизвестных координат точек $r_k = r_k(t)$ равно $3n$ и $3n$ неизвестных реакций связей R_k ($k = 1, \dots, n$).

Таким образом, число неизвестных $6n$ (r_k, R_k) больше числа уравнений $3n + l$ на число степеней свободы $m = 3n - l$, следовательно, задача неопределенна. Если связи идеальные, то уравнение (3.2) эквивалентно m уравнениям. Для их получения нужно из правой части (3.2) выразить зависимые виртуальные переменные из множества $\delta x, \delta y, \delta z, \dots, \delta x_n, \delta y_n, \delta z_n$ через независимые, используя уравнения связи. «Собирая» члены при независимых виртуальных перемещениях, получим линейную комбинацию независимых виртуальных перемещений, равную нулю, откуда следуют m уравнений. Таким образом, имеем $6n$ неизвестных и $3n + l + 3n - l = 6n$ уравнений, т.е. задача является определенной.

Общее уравнение динамики (3.3) содержит в себе всю информацию о движении данной механической системы с идеальными удерживающими связями под действием заданных активных сил. В дальнейшем общее уравнение динамики будет положено в основу получения всех основных уравнений движения механических систем — голономных и неголономных.

Общее уравнение динамики (3.3) называют также *дифференциальным вариационным принципом Даламбера — Лагранжа*. Принцип называется *дифференциальным*, так как

в нем сравнивается данное положение системы с ее варьированным положением в произвольный фиксированный момент времени (синхронное варьирование). Принцип называется вариационным, так как в него входят вариации — виртуальные перемещения.

Таким образом, принцип Даламбера—Лагранжа формулируется следующим образом: истинное движение из всех кинематически возможных выделяется тем, что для него в данный момент времени сумма работ активных сил и сил инерции на любых виртуальных перемещениях равна нулю.

Вариационные дифференциальные принципы: Журдена, Гаусса, возможных перемещений

3.3.

Принцип Журдена представляет собой дифференциальный вариационный принцип, который следует из (3.3) в случае, когда $\delta r_k = \delta V_k \Delta t$, где $\delta V_k = V_{k1}^* - V_{k2}^*$ — разность возможных скоростей в сравниваемых движениях, причем δV_k может быть и конечной величиной.

При сформулированном условии общее уравнение динамики (3.3) преобразуется в соотношение

$$\sum_{k=1}^n (F_k - m_k W_k) \delta V_k = 0.$$

Следовательно, дифференциальный вариационный принцип Журдена выделяет в данный момент времени среди кинематически возможных в данный момент времени движений (для которых $r_{k1}^* = r_{k2}^*$, $\delta V_k \neq 0$) действительное движение таким образом, что сумма мощностей внешних сил и сил инерции равна нулю.

Принцип Гаусса представляет собой еще одну форму принципа Даламбера — Лагранжа, выражающую экстремальное свойство некоторой функции.

Представим δr_k в виде отрезка ряда Тейлора:

$$\delta r_k = \delta V_k \Delta t + \frac{1}{2} \delta W_k (\Delta t)^2 + \dots \quad (3.6)$$

В данный момент времени сравним движения, в которых все точки системы имеют одни и те же возможные положения r_k^* и скорости V_k^* , что и в действительном движении. Возможные ускорения точек системы в сравниваемых движениях различаются, поэтому в (3.6) $\delta V_k = 0$ и уравнение (3.3) приводится к виду

$$\sum_{k=1}^n (F_k - m_k W_k) \cdot \delta W_k = 0. \quad (3.7)$$

Введем функцию

$$Z = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k \left(W_k - \frac{F_k}{m_k} \right)^2, \quad (3.8)$$

которая называется *функцией принуждения*.

Из сравнения (3.7) и (3.8) получим, что выражение (3.7) представляет дифференциал (3.8):

$$dZ = 0. \quad (3.9)$$

Условие (3.9) есть условие стационарности (экстремальности) функции (3.8). Функция Z на действительных перемещениях минимальна.

Таким образом, принцип Гаусса определяет, что среди сравниваемых кинематически возможных движений (для которых $r_{k1}^* = r_{k2}^*$, $V_{k1}^* = V_{k2}^*$, $\delta W_k \neq 0$) действительное движение выделяется тем, что для него принуждение Z минимально.

Величина Z является мерой отклонения действительного движения системы от ее свободного движения, следовательно, несвободная система совершает движение, наиболее близкое к свободному.

Физический смысл принципа Гаусса следует из представления основного уравнения динамики в виде $m_k W_k = F_k + R_k$ и меры принуждения как

$$Z = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{R_k^2}{m_k}.$$

Условие минимума Z выражает свойство реакций связей, которые должны быть для действительного движения минимальны из всех возможных.

Принцип возможных перемещений (принцип Лагранжа) формулируется следующим образом: для равновесия механической системы, подчиненной идеальным, стационарным и неосвобождающим связям, необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех активных сил, приложенных к точкам системы, была равна нулю на любом возможном перемещении системы, если скорости точек системы в рассматриваемый момент времени равны нулю, т.е.

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k = 0. \quad (3.10)$$

Необходимость условия (3.10) следует из общего уравнения динамики

$$\sum_{k=1}^n (\mathbf{F}_k - m_k \mathbf{W}_k) \delta \mathbf{r}_k = 0$$

при $\mathbf{W}_k \equiv \mathbf{0}$ в случае равновесия системы.

Достаточность доказывается от противного. Пусть все условия теоремы выполняются. Если система вышла из равновесия, тогда хотя бы для одной точки не выполняется условие равновесия

$$\mathbf{F}_k + \mathbf{R}_k \neq 0. \quad (3.11)$$

Умножив (3.11) скалярно на $\delta \mathbf{r}_k$, получим

$$(\mathbf{F}_k + \mathbf{R}_k) \cdot \delta \mathbf{r}_k > 0. \quad (3.12)$$

Просуммируем (3.12). С учетом условия идеальности связей

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{R}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k = 0$$

получим

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k > 0,$$

что противоречит условию (3.10).

В принцип возможных перемещений не входят силы реакций связей. Но его можно применять для определения неизвестных сил реакций связей.

Таким образом, в принцип возможных перемещений входят в действительности не активные силы, а все приложенные к точкам системы силы, кроме сил реакций идеальных связей, которые по условиям задачи не требуется определять.

Основные уравнения динамики для систем материальных точек

3.4. СО СВЯЗЯМИ

Движение свободных систем материальных точек описывается основным уравнением динамики

$$m_i W_i = F_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

которое содержит $3n$ уравнений и $3n$ неизвестных $x_1(t), y_1(t), z_1(t), \dots, x_n(t), y_n(t), z_n(t)$.

Если система несвободна, то к аксиомам Ньютона необходимо добавить аксиому связей: всякую связь можно заменить реакциями связей.

Для несвободной системы основные уравнения динамики имеют вид

$$m_i W_i = F_i + R_i, \quad (3.13)$$

где R_i — неизвестные реакции связей.

Таким образом, имеем $3n$ уравнений и $6n$ неизвестных. Математически связи представляют собой l соотношений относительно декартовых координат x_i, y_i, z_i и (или) их производных

$$\begin{aligned} f_m(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, t) &= 0, \quad m = 1, \dots, l_1; \\ \varphi_k(x_1, \dot{x}_1, \dots, z_s, \dot{z}_s, t) &= 0, \quad k = 1 \dots l_2, \quad l_1 + l_2 = l. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Говорят, что *система голономная*, если уравнения кинематических (дифференциальных) связей φ_k могут быть про-

интегрированы и приведены к виду (3.14) для f_m . Тогда число уравнений будет равным $3n + l$, а неизвестных — $6n$, т.е. система не определена.

Если связи R_i идеальные, то элементарная работа связей

$$\tilde{d}A^R = \sum_{i=1}^n R_i \cdot \delta r_i = 0, \quad (3.15)$$

а общее уравнение динамики имеет вид (3.13).

Уравнение (3.15) эквивалентно $3n - l$ уравнениям. Действительно, среди $3n$ виртуальных перемещений $\delta x_1 \dots \delta z_n$ в силу l уравнений связи (3.14) независимых будет $3n - l$, например, первые $3n - l$ величины $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1, \dots, \delta x_{3n-l-3}, \delta y_{3n-l-2}, \delta z_{3n-l}$, через которые выражаются l остальных зависимых вариаций координат. Выразить их можно следующим образом. Возьмем от (3.14) дифференциал, получим

$$df_i = \sum_{j=1}^{3n} \frac{\partial f_i}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial f_i}{\partial t} dt = 0, \quad q_j = x_j \text{ (или } y_j, z_j), \quad i = 1, \dots, l. \quad (3.16)$$

Если f не зависит явно от t и $\frac{\partial f_i}{\partial q_j} = a_{ij}(g_k)$, тогда из (3.16) мож-

но выразить l зависимых переменных от $3n - l$ независимых:

$$dq_k = \sum_{s=1}^{3n-l} b_{ks} dq_s, \quad k = 1, \dots, l. \quad (3.17)$$

Подставим (3.17) в (3.15) и приведем подобные члены при δq_s . В силу независимости δq_s получим $3n - l$ уравнений для нахождения неизвестных реакций R_i .

Таким образом, в случае идеальных связей для голономной системы имеем $3n$ основных уравнений динамики, $3n - l$ уравнений для нахождения реакций связей, т.е. $6n$ уравнений и $6n$ неизвестных $r_i(t)$, R_i .

Если среди связей есть неидеальные, то общее уравнение динамики запишем в виде

$$\sum_{k=1}^n (F_k + R_k - m_k W_k) \delta r_k = 0. \quad (3.18)$$

В уравнении (3.18) в силу условия (3.15) не содержатся реакции идеальных связей.

Так как R_k в (3.18) неизвестны, то число неизвестных составит $6n$, а число уравнений (3.22) — $3n + l$ уравнений связи. Таким образом, для того чтобы задача была определенной, необходимо иметь дополнительную информацию о физических свойствах и характере связей, порождающих реакции R_k .

Вернемся к принципу Даламбера

$$F_k + R_k + J_k = 0.$$

Для свободной системы он эквивалентен основному уравнению динамики. Для несвободных систем принцип эквивалентен второй аксиоме Ньютона вместе с аксиомой связей. Таким образом, в рамках ньютоновской векторной механики все подходы эквивалентны.

Общее уравнение динамики совместно с применением обобщенных координат открывает новые возможности в механике несвободных систем.

Рассмотрим свободную систему. Пусть декартовы координаты $x_i^{(k)}$ ($i = 1, 2, 3$) выражаются через некоторые обобщенные координаты q_j . Обозначим $x_k = x_1^{(k)}$, $y_k = x_2^{(k)}$, $z_k = x_3^{(k)}$, тогда в общем случае уравнения преобразования между декартовыми координатами и обобщенными

$$x_i^{(k)} = x_i^{(k)}(q_1, \dots, q_{3n}, t), \quad i = 1, 2, 3, \quad k = 1, \dots, n, \quad (3.19)$$

взаимно однозначные.

Пусть на систему наложены голономные связи, тогда в силу (3.14)

$$f_m(q_1, \dots, q_{3n}, t) = 0, \quad m = 1, \dots, l. \quad (3.20)$$

Среди $3n$ обобщенных координат q_1, \dots, q_{3n} имеется $3n - l$ независимых, а остальные могут быть выражены через них в силу (3.20):

$$q_j = q_j(q_1, \dots, q_{3n-l}, t). \quad (3.21)$$

Соответственно (3.21) и декартовы координаты в (3.19) запишутся в виде

$$x_i^{(k)} = x_i^{(k)}(q_1, \dots, q_{3n-l}, t). \quad (3.22)$$

Таким образом, законы динамики могут быть сформулированы в обобщенных координатах. Полагая в формуле (2.18) $\mathbf{J}_k = 0$, получаем условия равновесия точки или системы точек, что соответствует задаче динамики, когда известен закон движения $\mathbf{r}(t) = 0$ и требуется найти силы (включая реакции), обуславливающие это состояние равновесия (движения). Следовательно, с одной стороны, можно детально анализировать силы, формально оперируя с ними согласно правилам векторной алгебры.

С другой стороны, в основу построения динамики можно положить вариационный принцип Лагранжа (принцип виртуальных перемещений), который утверждает, что элементарная работа активных сил на любом виртуальном перемещении

$$\sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k \delta \mathbf{r}_k = 0,$$

что следует из принципа Даламбера — Лагранжа при $W_k = 0$ — условии равновесия системы.

Раздел

II

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ СТАТИКА

-
4. Геометрия сил
 5. Теория пар
 6. Условия равновесия пространственной и плоской систем сил
 7. Расчет равновесия системы тел и ферм
 8. Трение
 9. Центр тяжести
 10. Геометрия масс в системах материальных точек и твердых телах

4

ГЕОМЕТРИЯ СИЛ

4.1. Основные понятия геометрии сил

Учение о равновесии геометрических тел без учета зависимости от связанного с ними движения составляет содержание статики.

Равновесие материальных тел зависит от геометрии приложенных сил и их модулей. Так как сила является векторной величиной, она применима для исследования статического (геометрического) равновесия тел.

Статика, используя методы векторной алгебры, рассматривает две основные задачи:

1. Замена системы сил, приложенной к твердому телу, другой более простой системой, ей эквивалентной.

2. Вывод общих условий, при которых твердое тело под действием приложенных сил будет находиться в состоянии покоя.

Так как главной физической величиной статики является сила, дадим несколько определений, связанных с понятием силы.

Под *силой* понимают действие одного тела на другое, выражающееся в виде давления P , притяжения R , отталкивания Q (рис. 4.1).

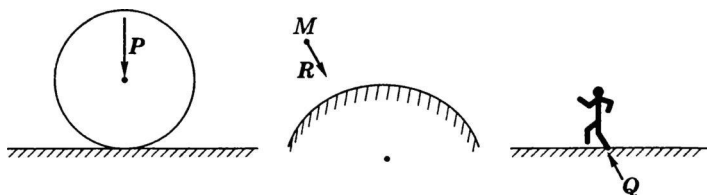


Рис. 4.1

Вне материальных тел сил не существует. Сила определяется тремя элементами: точкой приложения, направлением и модулем (численным значением), т.е. является вектором. За единицу силы в Международной системе единиц измерения (СИ) принимается Ньютон (Н).

Прямая, по которой направлена сила F , называется *линией действия силы* L (рис. 4.2).

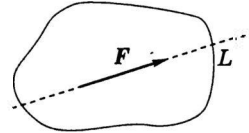


Рис. 4.2

Совокупность сил (рис. 4.3), приложенных к телу или системе тел, называется *системой сил* ($F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$).

Две системы сил (F_1, F_2, \dots, F_n) и (R_1, R_2, \dots, R_n) называются *эквивалентными*, если при замене одной системы сил другой кинематическое состояние тела остается неизменным. Эквивалентность систем сил обозначается $(F_1, F_2, \dots, F_n) \sim (R_1, R_2, \dots, R_n)$.

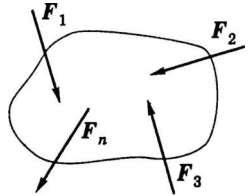


Рис. 4.3

Если система сил эквивалентна одной силе (F_1, F_2, \dots, F_n) $\sim R$, то сила R называется *равнодействующей* данной системы сил. Например, система сил F_1, F_2 (рис. 4.4) эквивалентна силе (R).

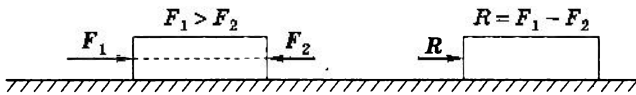


Рис. 4.4

Если система сил (F_1, F_2, \dots, F_n), приложенная к покоящемуся телу, не изменяет его состояния, то такая система сил называется *системой, эквивалентной нулю* или *уравновешенной* и обозначается $(F_1, F_2, \dots, F_n) \sim 0$. Например, колесо, находящееся в состоянии покоя на горизонтальном основании, останется в таком состоянии, если к нему приложить систему сил (F_1, F_2), причем $F_1 = -F_2$, как показано на рис. 4.5, т.е. $(F_1, F_2) \sim 0$.

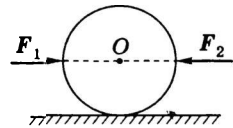


Рис. 4.5

В теоретической механике рассматривают такую модель твердого тела, в котором расстояние между любыми двумя точками, например A и B (рис. 4.6, a), не изменяется независимо от действия приложенной системы сил (рис. 4.6, b), т.е. $AB = l = \text{const}$.

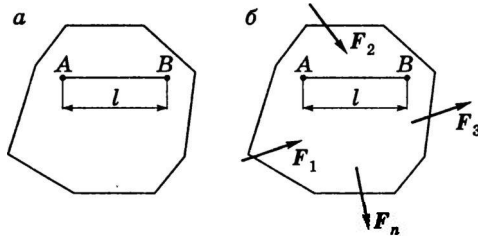


Рис. 4.6

Данное тело не испытывает деформации при нагружении или разгрузке. Такую модель называют **абсолютно твердым телом**. С помощью этой модели можно решить ряд сложных технических задач.

Аксиомы геометрии сил.

4.2. Теорема о трех параллельных силах

Сформулируем аксиомы геометрической статики.

Первая аксиома: две силы F_1 и F_2 , приложенные к абсолютно твердому телу, будут уравновешены (эквивалентны нулю) тогда и только тогда, когда они равны по модулю, действуют по одной прямой и направлены в противоположные стороны (см. рис. 4.5 и 4.7, a).

Вторая аксиома: не нарушая состояния абсолютно твердого тела (рис. 4.7, b), к нему можно прикладывать или исключать силы тогда и только тогда, когда они составляют уравновешенную систему. В частности, эта система может состоять из двух сил, равных по модулю, действующих по одной прямой и направленных в противоположные стороны: $F_B = -F'_B$ (рис. 4.7, $в$).

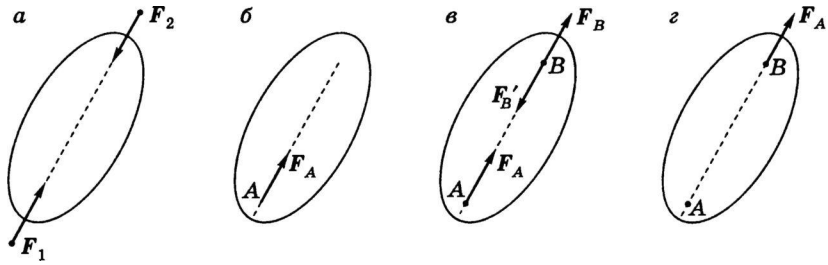


Рис. 4.7

Следствие: не нарушая состояния тела, точку приложения силы можно переносить вдоль линии ее действия (рис. 4.7, г).

Третья аксиома, или аксиома параллелограмма сил: не изменяя состояния тела, две силы, приложенные к одной его точке, можно заменить одной равнодействующей, приложенной в той же точке и равной их геометрической сумме: $R = F_1 + F_2$. В этом случае равнодействующая является диагональю параллелограмма со сторонами F_1 и F_2 (рис. 4.8).

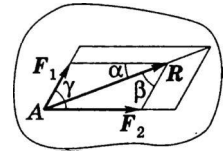


Рис. 4.8

Аксиома полностью определяет модуль, точку приложения и направление равнодействующей силы. Так как $R = F_1 + F_2$, то

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos(\angle F_1F_2)} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \gamma}.$$

Например, если $\gamma = \frac{\pi}{2}$, то

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}.$$

На основании теоремы синусов (рис. 4.9) имеем

$$\frac{F_1}{\sin \alpha} = \frac{F_2}{\sin \beta} = \frac{R}{\sin \gamma}.$$

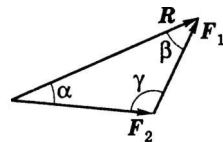


Рис. 4.9

Четвертая аксиома, или третий закон Ньютона: силы взаимодействия двух тел равны по модулю, направлены по

одной прямой в противоположные стороны и приложены к разным телам.

Например, груз, висящий на тросе BC (рис. 4.10), тянет конец троса вниз с некоторой силой P . Трос BC поддерживает груз с силой R , называемой реакцией троса. Силы P и R действуют на различные тела. Согласно аксиоме силы P и R имеют равные модули и направлены по одной прямой в противоположные стороны.

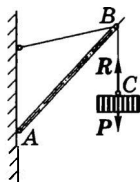


Рис. 4.10

Пятая аксиома, или принцип отвердевания: все реальные тела испытывают деформирование под действием сил. Считается, что равновесие деформируемого тела не нарушится, если жестко связать его точки, т.е. рассматривать тело как абсолютно твердое. Принцип отвердевания широко используется на практике, так как любое изменяемое тело (ремень, трос, цепь и т.п.) можно рассматривать как абсолютно твердое.

Теорема о трех непараллельных силах: если под действием трех сил тело находится в равновесии, и линии действия двух сил пересекаются в точке A , то все силы лежат в одной плоскости и их линии действия пересекаются в точке A (рис. 4.11).

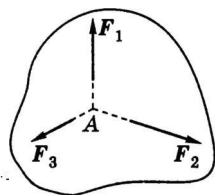


Рис. 4.11

Данная теорема рассматривает случай эквивалентности нулю трех непараллельных сил, приложенных к твердому телу.

Активные и пассивные силы.

4.3.

Виды связей

Тело называется *свободным*, если его перемещения ничем не ограничены. Тело, перемещение которого ограничено другими телами, называется *несвободным*.

Тела, ограничивающие перемещения данного тела, называются *связями*.

Силы, с которыми связи действуют на данное тело, называются *реакциями связей*.

Всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если действие связей заменить реакциями, приложенными к данному телу.

Силы, не зависящие от связей, называются *активными (заданными) силами*. Силы реакций связей — *пассивными силами*.

Рассмотрим некоторые типичные *виды связей* и укажем возможные направления их реакций:

1. Тело, опирающееся на идеально гладкую (без трения) поверхность

Реакция N идеально гладкой поверхности направлена по нормали n к касающейся поверхности (рис. 4.12, а), а реакции N_1 и N_2 по нормальям n_1 и n_2 соответственно (рис. 4.12, б).

2. Гладкое тело, опирающееся на острие

Реакция N направлена по нормали n к поверхности самого тела (рис. 4.13).

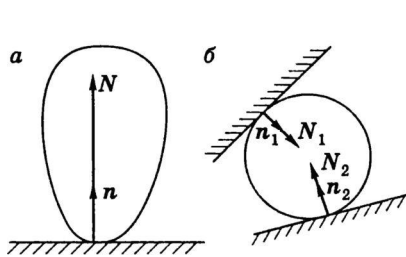


Рис. 4.12

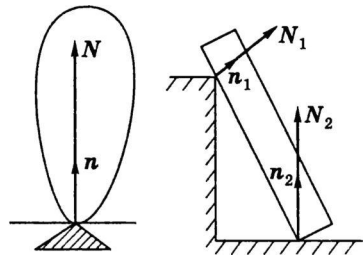


Рис. 4.13

3. Тело, упирающееся в угол

Связь препятствует перемещению тела как по вертикали, так и по горизонтали. Реакция R раскладывается на две составляющие R_x , R_y (рис. 4.14).

4. Сферический шарнир

Поверхность контакта идеально гладкая. Реакция R проходит через центр шарнира

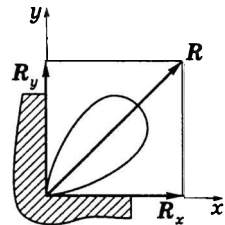


Рис. 4.14

(рис. 4.15, *a*) и может быть представлена тремя составляющими R_x , R_y , R_z , направленными вдоль осей X , Y , Z (рис. 4.15, *б*).

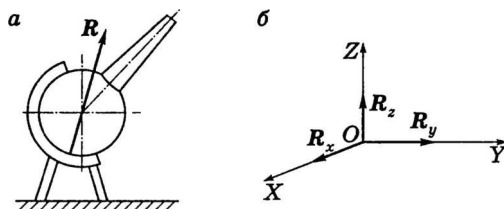


Рис. 4.15

5. Подпятник

Направление реакции R также нельзя определить заранее (рис. 4.16, *a*), поэтому ее обычно представляют в виде составляющих R_x , R_y , R_z , направленных вдоль осей X , Y , Z (рис. 4.16, *б*).

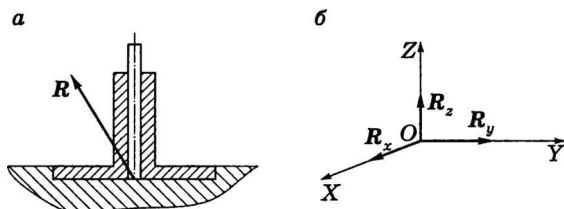


Рис. 4.16

6. Цилиндрическая шарнирно-неподвижная опора

Реакция R проходит через ось шарнира (рис. 4.17, *a*), направление реакции — любое (в плоскости, перпендикулярной оси опоры). R может быть представлена в виде двух составляющих R_x , R_y (рис. 4.17, *б*).

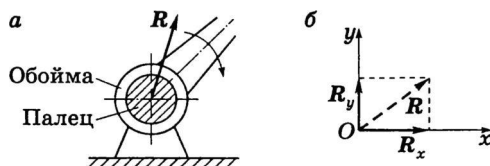


Рис. 4.17

7. Цилиндрическая шарнирно-подвижная опора
Реакция R направлена перпендикулярно к плоскости $I-I$ (рис. 4.18).



Рис. 4.18

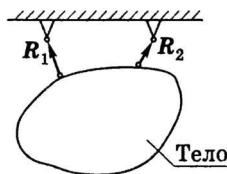


Рис. 4.19

9. Невесомый жесткий стержень
Реакции R_1 , R_2 , R_3 проходят через линии, соединяющие центры шарниров (рис. 4.20) стержней 1, 2, 3, т.е. вдоль стержней.

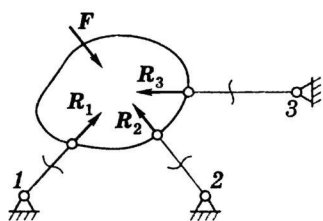


Рис. 4.20

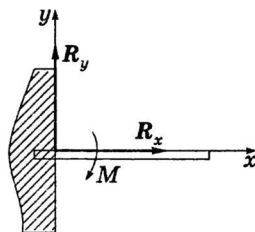


Рис. 4.21

10. Жесткая заделка (защемление)
 R_x , R_y — составляющие реакции заделки балки по осям x и y соответственно; M — реактивный момент того или иного направления* (рис. 4.21).

* Определение момента силы см. в 5.3.

Проекции силы на оси декартовых координат и на плоскость.

4.4. Аналитический способ сложения сил

Для аналитического решения задач по теоретической механике вводится понятие проекции силы, аналогичное проекции вектора в математике. Понятие проекций физических величин, как и моментов сил, широко используется во многих технических дисциплинах.

Возьмем правую систему координат с неподвижными осями x , y , z (рис. 4.22). Пусть в данной системе координат задана некоторая сила P . Построим параллелепипед, в котором сила P является диагональю. Разложим силу P по правилу параллелепипеда на три составляющие силы P_x , P_y и P_z , направленные параллельно осям x , y и z соответственно.

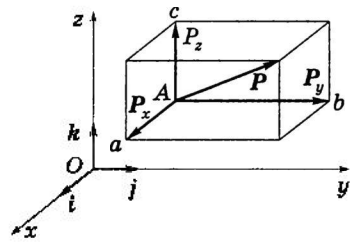


Рис. 4.22

При этом $P = P_x + P_y + P_z$.

Алгебраические значения длин направленных отрезков Aa , Ab и Ac называются *проекциями силы* на оси x , y и z .

Тогда

$$P_x = iX; \quad P_y = jY; \quad P_z = kZ,$$

где i , j , k — единичные векторы вдоль осей x , y , z соответственно; $X = Aa$; $Y = Ab$; $Z = Ac$.

Поэтому силу можно записать как

$$P = iX + jY + kZ. \quad (4.1)$$

Равенство (4.1) представляет собой формулу разложения силы на составляющие по осям координат через ее проекции на эти оси.

Часто проекции обозначают той же буквой, что и силу, с индексом соответствующей координатной оси:

$$X = P_x; \quad Y = P_y; \quad Z = P_z.$$

Проекцию силы на каждую координатную ось обычно определяют произведением модуля силы на косинус угла между направлениями осей и силы:

$$X = P \cos(P, i); \quad Y = P \cos(P, j); \quad Z = P \cos(P, k), \quad (4.2)$$

где (P, i) , (P, j) , (P, k) — углы, заключенные между направлением силы P и направлениями осей x , y и z соответственно.

Если известны проекции силы на три взаимно перпендикулярные оси x , y и z , то модуль силы

$$P = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}, \quad (4.3)$$

а направление силы определяется с помощью направляющих косинусов:

$$\cos(P, i) = X/P; \quad \cos(P, j) = Y/P; \quad \cos(P, k) = Z/P. \quad (4.4)$$

Согласно аксиоме параллелограмма сил каждую из сил, лежащих в одной плоскости, например P , можно разложить на две составляющие силы P_x , P_y , направленные параллельно осям x и y (рис. 4.23).

В этом случае

$$\begin{aligned} P &= P_x + P_y \\ \text{или} \quad P &= iX + jY = iP_x + jP_y. \end{aligned} \quad (4.5)$$

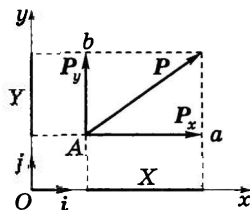


Рис. 4.23

Согласно (4.2)

$$X = P \cos(P, i), \quad Y = P \cos(P, j). \quad (4.6)$$

Модуль и направление силы определяются как

$$P = \sqrt{X^2 + Y^2}; \quad \cos(P, i) = X/P; \quad \cos(P, j) = Y/P.$$

Из формул (4.2) и (4.6) следует, что проекция может быть со знаком плюс или минус в зависимости от угла между силой и осью.

Рассмотрим проекцию силы P на ось x (рис. 4.24). Угол (P, i) между направлением силы P и оси x , проведенной через точку приложения силы, обозначим через α . Этот угол отсчитывается от положительной полуоси по направлению движения часовой стрелки или против, его величина не должна превышать 180° при любом направлении силы.

При вычислении проекции силы на ось возможны следующие частные случаи:

1. Проекция положительная (рис. 4.24, а):

$$0 \leq \alpha < 90^\circ; \quad X = P \cos \alpha.$$

2. Проекция равна нулю (рис. 4.24, б):

$$\alpha = 90^\circ; \quad X = P \cos 90^\circ = 0.$$

3. Проекция отрицательная (рис. 4.24 в):

$$90 < \alpha < 180^\circ; \quad X = P \cos \alpha = -P \cos \beta,$$

где α — угол между направлением силы и положительным направлением оси x ; β — острый угол между линией действия силы и осью x .

При решении задач рекомендуется вычислять абсолютное значение проекции силы как произведение модуля силы на косинус острого угла между линией действия силы и осью с определением знака проекции непосредственно по рисунку. В задачах пространственной статики используется другой прием получения проекций на оси координат.

Рассмотрим силу F в системе координат $Oxyz$ (рис. 4.25). Сначала сила F проектируется на координатную плоскость, содержащую выбранные оси проекций, например Oy и Ox . Отметим, что проекция вектора на плоскость есть вектор, а не скаляр, как это было в случае проекции силы на ось.

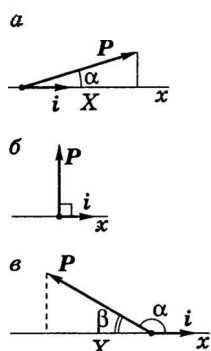


Рис. 4.24

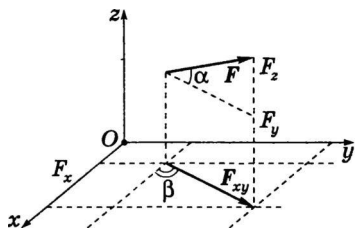


Рис. 4.25

Следовательно, имеем $F_{xy} = F \cos \alpha$, где α — угол между плоскостью xy и вектором F . Затем вектор F_{xy} проецируется на координатные оси Ox и Oy : $F_x = F_{xy} \cos \beta$; $F_y = F_{xy} \sin \beta$. Проекция вектора F на ось Oz : $F_z = F \sin \alpha$.

Рассмотрим *аналитический способ сложения сил*.

Теорема: проекция вектора суммы на какую-нибудь ось равна алгебраической сумме проекций слагаемых векторов на ту же ось.

Пусть задана система четырех сил (F_1, F_2, F_3, F_4).

Запишем геометрическую сумму векторов, равнодействующую которой обозначим через R ; т.е. $R = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$.

Геометрической интерпретацией данного уравнения будет силовой многоугольник, показанный на рис. 4.26.

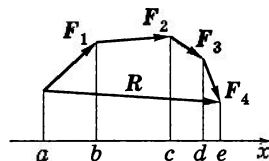


Рис. 4.26

Так как $R \neq 0$, то данный силовой многоугольник будет не замкнут. Если бы $R = 0$, то конец последней силы F_4 и начало первой силы F_1 совпадали.

Сумма проекций данных векторов на ось x равна

$$F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x} = ab + bc + cd + de = ae.$$

Выражение ae равно проекции силы R на ось x , $R_x = ae$, следовательно,

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x}.$$

Данная теорема дает возможность осуществить переход от зависимости между векторами к зависимости между их проекциями.

4.5. Система сходящихся сил

Силы называются *сходящимися*, если линии действия всех сил, составляющих систему, пересекаются в одной точке (рис. 4.27).

Теорема: система сходящихся сил эквивалентна одной силе (равнодействующей), которая равна сумме всех этих сил и проходит через точку пересечения их линий действия.

Рассмотрим рис. 4.28. Сначала вычислим равнодействующую сил F_1 и F_2 . Согласно аксиоме параллелограмма сил равнодействующая двух сил

$$R_1 = F_1 + F_2.$$

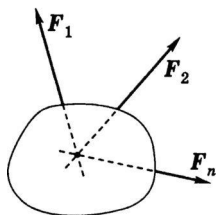


Рис. 4.27

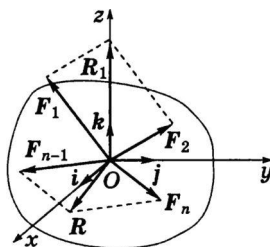


Рис. 4.28

Затем найдем равнодействующую R_1 и F_3 :

$$R_2 = R_1 + F_3 = F_1 + F_2 + F_3;$$

равнодействующую R_3 сил R_2 и F_4 и т.д.

Равнодействующая всей системы сил

$$R = R_{n-1} + F_n = F_1 + F_2 + \dots + F_n = \sum F_i.$$

Аналитический способ определения равнодействующей системы сходящихся сил. Пусть на тело действует система сходящихся сил (F_1, F_2, \dots, F_n) , тогда их равнодействующая $R = F_1 + F_2 + \dots + F_n$. В проекциях на координатные оси x , y и z R можно представить как

$$R_x = R \cdot i = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = \sum_{i=1}^n F_{ix},$$

$$R_y = R \cdot j = \sum F_{iy},$$

$$R_z = R \cdot k = \sum F_{iz},$$

где $R = R_x i + R_y j + R_z k$ согласно (4.1).

В приведенных выше соотношениях определения проекций использованы свойства скалярного произведения двух векторов.

Модуль равнодействующей аналогично (4.3):

$$R = \sqrt{(\sum F_{ix})^2 + (\sum F_{iy})^2 + (\sum F_{iz})^2}.$$

Направляющие косинусы равнодействующей равны

$$\cos(x, R) = \frac{R_x}{R}; \quad \cos(y, R) = \frac{R_y}{R}; \quad \cos(z, R) = \frac{R_z}{R}.$$

Условия равновесия системы сходящихся сил. Для любой системы сил можно записать $(F_1, F_2, \dots, F_n) \sim R$, где R — равнодействующая системы сил (F_1, F_2, \dots, F_n) .

Для равновесия тела необходимо, чтобы $R = 0$; следовательно, $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$:

$$R_x = 0; \quad R_y = 0; \quad R_z = 0.$$

Таким образом, пространственная система сходящихся сил находится в равновесии, если $R_x = \sum F_{ix} = 0$; $R_y = \sum F_{iy} = 0$; $R_z = \sum F_{iz} = 0$.

Плоская система сходящихся сил находится в равновесии, если $R_x = \sum F_{ix} = 0$; $R_y = \sum F_{iy} = 0$.

Геометрическая интерпретация $R = 0$ говорит о том, что силовой многоугольник, например из системы четырех сил, замкнут (рис. 4.29).

Следовательно

$$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = 0.$$

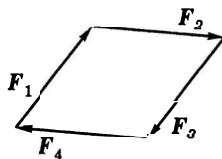


Рис. 4.29

Напомним, что система сил, показанная на рис. 4.26, не будет находиться в равновесии, так как силовой многоугольник не замкнут: $R \neq 0$.

Рассмотрим решение некоторых задач.

Задача 1. Кран состоит из стрелы AB , прикрепленной шарниром A и тросом CB к мачте (рис. 4.30). К концу B стрелы подвешен груз весом $G = 4$ кН, угол $\alpha = 25^\circ$, угол $\beta = 128^\circ$.

Пренебрегая весом стрелы, определить натяжение троса и силу, сжимающую стрелу AB .

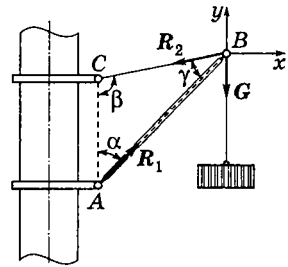


Рис. 4.30

Решение.

Стрела находится в равновесии под действием системы сил G , R_1 , R_2 (см. рис. 4.30). Спроецируем все силы на оси координат x и y :

$$\sum F_{ix} = -R_2 \cos 38^\circ + R_1 \cos 65^\circ = 0;$$

$$\sum F_{iy} = -R_2 \cos 52^\circ + R_1 \cos 25^\circ - G = 0.$$

Так как $\cos 38^\circ = 0,79$, $\cos 65^\circ = 0,42$, $\cos 25^\circ = 0,91$ и $\cos 52^\circ = 0,62$, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} -0,79R_2 + 0,42R_1 = 0; \\ -0,62R_2 + 0,91R_1 = 4. \end{cases}$$

Откуда $R_1 = 6,9$ кН, $R_2 = 3,7$ кН.

О т в е т: $R_1 = 6,9$ кН, $R_2 = 3,7$ кН.

Фермами называются конструкции, составленные из отдельных прямолинейных стержней, соединенных между собой по концам шарнирами, причем так, что они образуют неизменяемое сооружение.

Так как стержни невесомы, то реакции стержней направлены вдоль их осей. Условимся считать все стержни растянутыми и, следовательно, реакции стержней направленными от узла по стержню. Если в результате решения получим положительное значение реакции, то выбранное направление правильно, т.е. соответствующий стержень растянут. Если получится отрицательное значение, то это означает, что стержень сжат.

Вырежем узел C (рис. 4.32, б). В точке C сходятся две неизвестные реакции S_3 и S_4 стержней 1 и 4 и одна известная реакция S'_2 ($|S'_2| = |S_2|$), которая направлена противоположно S_2 , т.е. $S_2 = -S'_2$.

Тогда уравнения равновесия запишутся как

$$\sum F_{ix} = S'_2 - S_1 = 0,$$

$$\sum F_{iy} = -S_4 = 0.$$

Отсюда $S_1 = S'_2 = 18$ кН, $S_4 = 0$.

Стержень 1 растянут, стержень 4 не напряжен.

Рассмотрим узел D (рис. 4.32, в).

$$\sum F_{ix} = S'_3 \cos \alpha - S_5 \cos \alpha - S_6 \cos \alpha = 0,$$

$$\sum F_{iy} = S'_3 \sin \alpha - S_5 \sin \alpha + S_6 \sin \alpha = 0.$$

Здесь учтено, что $\angle LDB = \alpha$ (см. рис. 4.31).

Из уравнений

$$S_5 = -20 \text{ кН}, \quad S_6 = 0.$$

Стержень 5 сжат, стержень 6 не напряжен.

О т в е т: $S_1 = S_2 = 18$ кН, $S_3 = S_5 = -20$ кН, $S_4 = 0$, $S_6 = 0$.

Сложение двух параллельных сил.

5.1. Пара сил

Рассмотрим сложение двух параллельных сил, направленных в одну сторону. На рис. 5.1 изображены две параллельные силы F_1 и F_2 , приложенные к твердому телу в точках A и B и направленные в одну сторону. Чтобы показать существование равнодействующей этих сил и найти ее, используем следующий прием:

Присоединим к телу в точках A и B две произвольные, но взаимно уравновешивающиеся силы Q_1 и Q_2 , направленные вдоль AB ($Q_1 = -Q_2$). Сложив Q_1 и F_1 , а также Q_2 и F_2 , получим непараллельные между собой силы R_1 и R_2 .

Очевидно, что

$$R_1 \sim (F_1, Q_1), \quad R_2 \sim (F_2, Q_2).$$

Перенесем R_1 и R_2 по их линиям действия в точку пересечения O . Так как R_1 и R_2 оказались приложенными в одной точке, то их можно сложить. Выполним сложение, предварительно разложив на прежние составляющие, т.е.

$$R_1 \sim (F_1, Q_1), \quad R_2 \sim (F_2, Q_2').$$

Отбросив Q_1' и Q_2' , найдем равнодействующую сил F_1 и F_2 :

$$R = F_1 + F_2, \quad |R| = |F_1| + |F_2|.$$

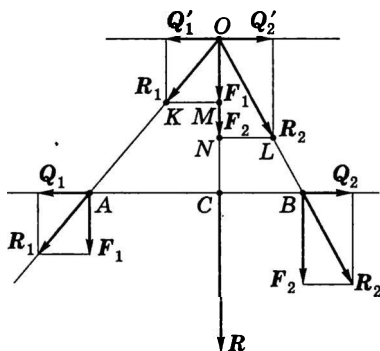


Рис. 5.1

Из подобия треугольников AOC и KOM , а также треугольников COB и NOL получим

$$\frac{F_1 AC}{KM} = \frac{F_2 CB}{KN};$$

так как $KM = KN$, то $\frac{F_1}{F_2} = \frac{BC}{AC}$.

Таким образом, система двух параллельных сил, направленных в одну сторону, имеет равнодействующую, параллельную этим силам, причем ее модуль равен сумме модулей слагаемых. Линия действия равнодействующей делит расстояние между точками приложения слагаемых сил на части, обратно пропорциональные модулям этих сил.

Теперь рассмотрим случай, когда F_1 и F_2 параллельны и направлены в противоположные стороны (рис. 5.2). Считаем, что $F_1 > F_2$.

На прямой AB в точках B и C возьмем такую систему сил F_2' и R , чтобы выполнялись условия

$$F_1 \sim (F_2' R), \quad F_2' = -F_2.$$

$(F_1, F_2) \sim (R, F_2', F_2)$, следовательно $(F_1, F_2) \sim R$.

Тогда $R = F_1 - F_2' = F_1 + F_2$.

Модуль R будет равен: $R = F_1 - F_2$.

Составим пропорции

$$\frac{R}{F_2} = \frac{AB}{AC}, \quad \frac{F_1}{F_2} = \frac{BC}{AC}.$$

Из составленных пропорций

$$AC = \frac{F_2}{F_1 - F_2} AB.$$

Две неравные по модулю и противоположно направленные силы имеют равнодействующую, параллельную этим силам, причем ее модуль равен разности модулей слагаемых. Линия действия равнодействующей делит внешним образом расстоя-

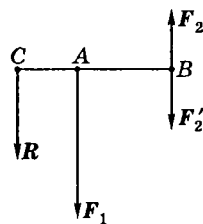


Рис. 5.2

ние между точками приложения слагаемых сил на части, обратно пропорциональные модулям этих сил.

Две параллельные силы, равные по модулю, но противоположно направленные, называются *парой сил* или просто *парой* (рис. 5.3):

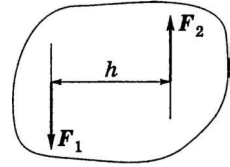


Рис. 5.3

$$F_1 = -F_2.$$

Пара сил представляет собой неуравновешенную систему, которая не может быть заменена одной силой. Таким образом, пара сил является неприводимой (неупрощаемой) системой сил. Пара сил является вращательной характеристикой тела и самостоятельным элементом статики (геометрии сил).

Величину h назовем *плечом пары* — это кратчайшее расстояние между линиями действия сил.

Очевидно, что $F_1 + F_2 = 0$; $|F_1| = |F_2|$.

Плоскость, в которой действует пара, называется *плоскостью пары*. Пару принято обозначать как (F_1, F_2) .

Момент силы относительно точки.

Теорема Вариньона для системы

5.2.

СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

Моментом силы относительно какой-либо точки O (центра) называется вектор $M_O(F)$, численно равный произведению модуля силы на плечо h , где h — кратчайшее расстояние от указанной точки до линии действия силы.

Вектор $M_O(F)$ направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через выбранную точку и линию действия силы, в ту сторону, откуда «вращение», совершаемое силой вокруг точки, представляется происходящим против хода часовой стрелки (рис. 5.4, а, б).

Момент силы относительно точки характеризует вращательный эффект силы, которая стремится повернуть тело во-

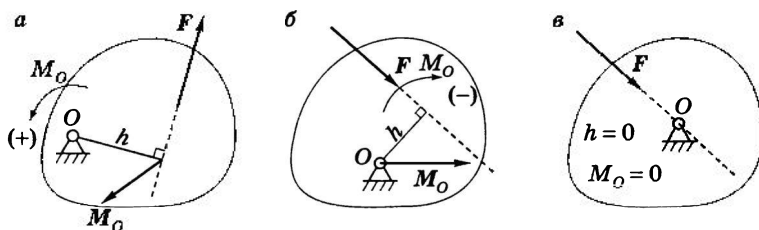


Рис. 5.4

круг этой точки. Вращательный эффект будет отсутствовать, если $h = 0$ (рис. 5.4, в).

Рассмотрим силу F , приложенную к точке A тела, определяемой в пространстве координатами x, y, z (рис. 5.5). Пусть сила стремится повернуть тело вокруг центра O . Очевидно, вращательный эффект силы будет зависеть: 1) от модуля силы F и длины плеча h ; 2) от положения плоскости поворота OAB ; 3) от направления поворота в этой плоскости. Соединим начало вектора F с точкой O вектором r . Тогда согласно определению векторного произведения можно написать

$$M_O = r \times F$$

или

$$M_O(F) = rF \sin \alpha = (r \sin \alpha = h) = Fh.$$

Так как площадь треугольника OAB

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} Fh,$$

то момент силы F можно выразить через удвоенную площадь треугольника:

$$M_O(F) = 2S_{\Delta} = Fh.$$

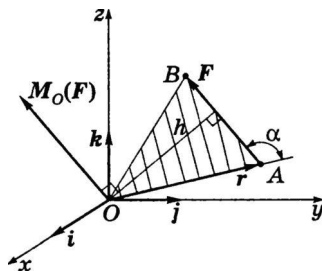


Рис. 5.5

Условно будем считать, что момент имеет знак «+», если сила стремится повернуть тело вокруг центра O против хода часовой стрелки (см. рис. 5.4, *a*), и знак «-» — если по ходу часовой стрелки (см. рис. 5.4, *b*).

Отметим следующие свойства момента относительно точки O :

1. Момент силы не изменяется при переносе точки приложения силы вдоль линии действия.

2. Момент силы относительно точки O равен нулю только тогда, когда сила равна нулю или плечо h равно нулю (линия действия силы пересекает точку O).

Теорема Вариньона для системы сходящихся сил. Рассмотрим систему сходящихся сил (F_1, F_2, \dots, F_n) . Выберем произвольный центр O (рис. 5.6). Согласно определению момента силы относительно точки

$$M_O(F_1) = r \times F_1,$$

$$M_O(F_2) = r \times F_2,$$

.....

$$M_O(F_n) = r \times F_n.$$

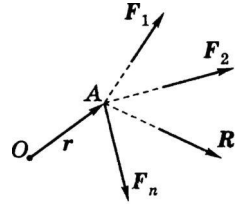


Рис. 5.6

Равнодействующая системы сходящихся сил

$$R = F_1 + F_2 + \dots + F_n$$

будет также проходить через точку A — точку пересечения линий действия сил.

Момент равнодействующей относительно точки O

$$M_O(R) = r \times R.$$

Теорема: момент равнодействующей системы сходящихся сил относительно произвольного центра равен векторной сумме моментов составляющих сил относительно того же центра.

Доказательство. Можно записать

$$M_O(R) = r \times R = r \times (F_1 + F_2 + \dots + F_n) = r \times F_1 + r \times F_2 + \dots + r \times F_n$$

или

$$M_O(R) = M_O(F_1) + M_O(F_2) + \dots + M_O(F_n) = \sum M_O(F_n).$$

5.3. Момент силы относительно оси

Моментом силы относительно оси называется скалярная величина, равная моменту проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную оси, взятому относительно точки пересечения оси с плоскостью.

Пусть задано тело, которое может вращаться вокруг некоторой оси z (рис. 5.7). Пусть в точке A тела действует сила F . Через эту точку проведем плоскость xy , перпендикулярную оси Oz . Разложим силу F на две составляющие — F_z и F_{xy} ($F_z \parallel Oz$, F_{xy} лежит в плоскости xy и одновременно является проекцией силы F на плоскость xy). Сила F_z вращательный эффект создавать не будет, так как $F_z \parallel Oz$, и при ее действии тело будет сдвигаться вдоль оси Oz . Сила F_{xy} создает вращательный эффект, тогда $M_z(F) = M_z(F_{xy})$, но $M_z(F_{xy}) = M_O(F_{xy}) = F_{xy}h$.

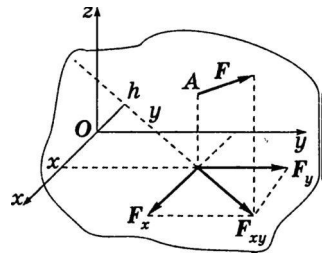


Рис. 5.7

Момент считаем положительным, если с положительного конца оси Oz поворот, который сила F_{xy} стремится совершить, виден происходящим против хода часовой стрелки, и отрицательным — если по ходу часовой стрелки.

В свою очередь проекцию F_{xy} можно разложить на составляющие F_x и F_y , т.е. $F_{xy} = F_x + F_y$.

Из теоремы Вариньона вытекает

$$M_O(F_{xy}) = M_O(F_x) + M_O(F_y),$$

где $M_O(F_x) = -yF_x$; $M_O(F_y) = xF_y$.

Следовательно,

$$M_z(F) = xF_y - yF_x. \quad (5.1)$$

Аналогично вычисляются моменты относительно двух других осей:

$$M_x(F) = yF_z - zF_y, \quad (5.2)$$

$$M_y(F) = zF_x - xF_z. \quad (5.3)$$

Часто момент силы F относительно точки O определяют через проекции векторов r и F на оси координат с помощью определителя:

$$M_O(F) = r \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \\ = (yF_z - zF_y)i + (zF_x - xF_z)j + (xF_y - yF_x)k.$$

Коэффициенты при i , j , k являются проекциями вектора M_O на оси x , y , z :

$$\begin{aligned} M_x &= yF_z - zF_y, \\ M_y &= zF_x - xF_z, \\ M_z &= xF_y - yF_x. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Как видно из сравнения (5.1)–(5.4), проекции вектора M_O и моменты относительно осей x , y , z совпадают.

Приведенные формулы дают аналитические выражения для моментов силы относительно осей координат.

Если заданы M_x , M_y и M_z , то можно найти следующие параметры:

$$\begin{aligned} |M_O(F)| &= \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}, \\ n_x &= \frac{M_x}{M_O(F)}, \quad n_y = \frac{M_y}{M_O(F)}, \quad n_z = \frac{M_z}{M_O(F)}, \end{aligned}$$

где через n_x , n_y и n_z обозначены направляющие косинусы вектора $M_O(F)$.

Из определения момента силы относительно оси видно, что он равен нулю в двух случаях:

- а) сила и ось параллельны;
- б) линия действия силы пересекает ось.

Оба эти случая объединяются в один: момент силы относительно оси равен нулю только тогда, когда линия действия силы и ось находятся в одной плоскости.

Рассмотрим пример. На рис. 5.8 показаны три положения гимнаста относительно перекладины (точка O). Вес гимнаста (Q) равняется 70 кг. В зависимости от положения гимнаста плечо h принимает значения $h_a = 0,45$ м; $h_b = 1,0$ м и $h_c = 0,25$ м. Определим момент силы тяжести, действующей на гимнаста в положениях a , b и c .

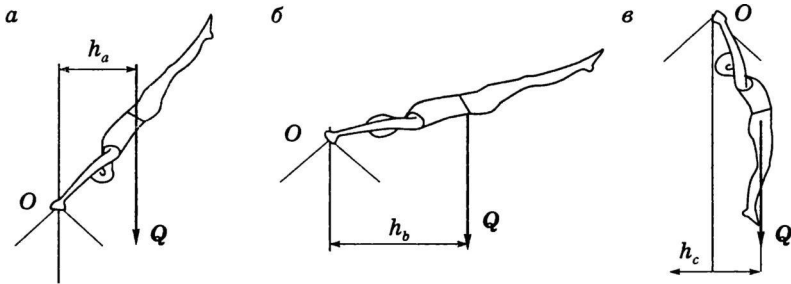


Рис. 5.8

Момент силы тяжести Q относительно точки O во всех трех случаях будет отрицательным, так как сила стремится вращать тело гимнаста по ходу часовой стрелки:

$$M_O^a(Q) = -Qh_a = -70 \cdot 0,45 = -0,315 \text{ кНм};$$

$$M_O^b(Q) = -Qh_b = -70 \cdot 1,0 = -0,700 \text{ кНм};$$

$$M_O^c(Q) = -Qh_c = -70 \cdot 0,25 = -0,175 \text{ кНм}.$$

5.4

Момент пары сил. Теоремы о парах

Используя свойства векторного произведения, запишем аналитические выражения для определения момента пары сил (F, F'). Пусть точка O — произвольная точка пространства (рис. 5.9).

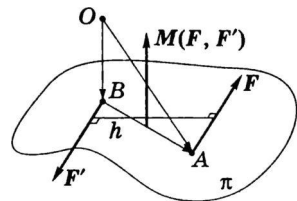


Рис. 5.9

Покажем, что момент пары равен сумме моментов сил относительно любого центра O , образующих пару:

$$\begin{aligned} M(F, F') &= M_0(F) + M_0(F') = OA \times F + OB \times F' = \\ &= OA \times F - OB \times F = (OA - OB) \times F = BA \times F. \end{aligned}$$

Так как $F = -F'$, $OA \times F + OB \times F' = OA \times F - OB \times F$.
Следовательно,

$$M(F, F') = BA \times F.$$

Момент пары сил не зависит от положения точки, относительно которой вычисляются моменты сил F' и F .

Таким образом, *момент пары* представляет собой вектор, перпендикулярный плоскости пары, равный по модулю произведению модуля одной из сил пары на плечо пары и направленный в ту сторону, откуда вращение пары видно происходящим против хода часовой стрелки. Если h плечо пары, то $M(F, F') = hF$. Из определения момента пары видно, что момент пары сил представляет собой свободный вектор, линия действия которого не определена. Момент пары равен нулю, если $h = 0$ либо $F = 0$.

С моментом пары сил часто сталкиваются на практике, например, при закручивании (откручивании) гаек, шурупов и т.д. (рис. 5.10).

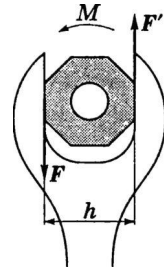


Рис. 5.10

Кратко изложим некоторые важные теоремы о парах сил.

Теорема 1: две пары, лежащие в одной плоскости, можно заменить одной парой, лежащей в той же плоскости с моментом, равным сумме моментов данных двух пар.

Рассмотрим две пары (F_1, F'_1) и (F_2, F'_2) с моментами $M_1(F_1, F'_1)$ и $M_2(F_2, F'_2)$ соответственно (рис. 5.11).

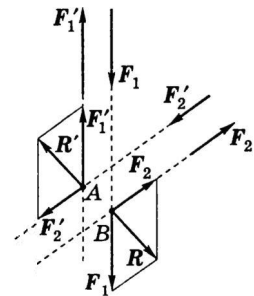


Рис. 5.11

Заданные системы сил приведем к системам сходящихся сил (F_1, F'_1) и (F_2, F'_2) в точках A и B соответственно.

Тогда

$$R = F_1 + F_2, \quad R' = F'_1 + F'_2,$$

$$F'_1 = -F_1, \quad F'_2 = -F_2, \quad R' = -R;$$

$$M(R, R_1) = BA \times R = BA \times (F_1 + F_2) = BA \times F_1 + BA \times F_2.$$

Но $BA \times F_1 = M_1$ и $BA \times F_2 = M_2$, следовательно, $M = M_1 + M_2$.

Теорема 2: две пары, имеющие равные моменты, эквивалентны.

Пусть на тело в плоскости π_1 действует пара (F_1, F'_1) с моментом $M(F_1, F'_1) = M_1$ (рис. 5.12). Покажем, что эту пару сил можно заменить другой парой (F_2, F'_2) , расположенной в плоскости π_2 , если $M(F_2, F'_2) = M_2 = M_1$.

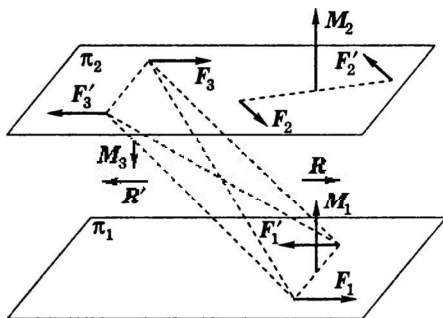


Рис. 5.12

Так как $M_1 \parallel M_2$, то плоскость $\pi_1 \parallel \pi_2$. Введем пару $(F_3, F'_3) \in \pi_2$, причем таким образом, чтобы $(F_2, F'_2, F_3, F'_3) \sim 0$. Этого можно достичь, если $F_3 = -F'_1$, $F'_3 = -F_1$, $M_3 = -M_1 \Rightarrow M_3 + M_2 = 0$.

Следовательно,

$$(F_1, F'_1) \sim (F_1, F'_1, F_2, F'_2, F_3, F'_3),$$

$$(F_1, F'_1, F_3, F'_3) \sim (R, R') \sim 0,$$

т.е.

$$(F_1, F'_1) \sim (F_2, F'_2).$$

Следствие. Пару сил можно перемещать и поворачивать в плоскости ее действия, переносить в параллельную плоскость, можно изменять силы и плечо одновременно, сохраняя лишь направление вращения пары и модуль ее момента.

Теорема 3: две пары, лежащие в пересекающихся плоскостях, эквивалентны одной паре, момент которой равен сумме моментов двух данных пар.

На рис. 5.13 π_1 и π_2 — пересекающиеся плоскости. Пусть заданы две пары сил (F_1, F_1') и (F_2, F_2') :

$$(F_1, F_1') \in \pi_2, \quad AB \in \pi_1;$$

$$(F_2, F_2') \in \pi_1, \quad AB \in \pi_2.$$

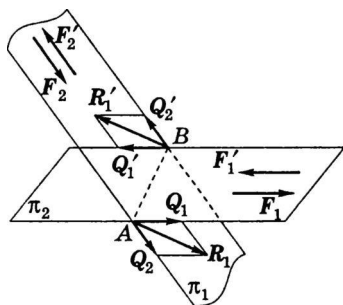


Рис. 5.13

На основании теоремы 2 и ее следствия

$$M(F_1, F_1') = M(Q_1, Q_1') = M_1,$$

$$M(F_2, F_2') = M(Q_2, Q_2') = M_2;$$

$$M(R_1, R_1') = BA \times R_1 = BA \times (Q_1 + Q_2) =$$

$$= BA \times Q_1 + BA \times Q_2 = M_1 + M_2,$$

$$M = M_1 + M_2.$$

Момент пары сил является свободным вектором и полностью определяет действие пары на абсолютно твердое тело.

Для деформируемых тел теория пар неприменима.

Приведение системы пар к простейшему виду. Система пар, как угодно расположенных в пространстве, моменты которых равны $M_1, M_2, M_3, \dots, M_n$, приводится к одной паре, момент которой равен сумме моментов всех пар:

$$M = M_1 + M_2 + \dots + M_n = \sum_{k=1}^n M_k.$$

Условие равновесия системы пар. Для равновесия системы пар необходимо и достаточно, чтобы было выполнено условие

$$M = \sum_{k=1}^n M_k = 0, \quad \text{или} \quad M_x = 0, \quad M_y = 0, \quad M_z = 0.$$

Если все пары лежат в одной плоскости, перпендикулярной, например, оси z , то

$$M_z = M_{1z} + M_{2z} + \dots + M_{nz} = 0.$$

Заметим, что $M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$.

Рассмотрим пример. На раму (рис. 5.14) действует пара сил (P_1, P_2) , где $P_1 = P_2 = P = 100$ Н.

Размеры указаны на рисунке. Пренебрегая весом рамы, определим реакции R_A и R_B опор.

Момент пары (P_1, P_2)

$$M_1 = P(BC - AD) = 200 \text{ Нм.}$$

Так как рама находится в равновесии, то реакции R_A и R_B уравновешены только парой (P_1, P_2) . Следовательно, реакции опор образуют пару сил (R_A, R_B) .

В случае равновесия $M_1 + M_2 = 0$, где M_2 — момент пары (R_A, R_B) . Отсюда $M_2 = -M_1 = -200$ Нм.

Плечо пары (R_A, R_B)

$$AB = 4 \text{ м.}$$

Следовательно,

$$R_A = R_B = \frac{200}{4} = 50 \text{ Н.}$$

R_A и R_B направлены, как показано на рис. 5.14.

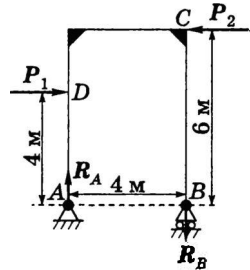


Рис. 5.14

6

УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ И ПЛОСКОЙ СИСТЕМ СИЛ

6.1. Лемма о параллельном переносе силы

Лемма: сила, приложенная в какой-либо точке тела, эквивалентна такой же силе, приложенной в любой другой точке этого тела, и паре сил, момент которой равен моменту данной силы относительно новой точки приложения.

Доказательство. Пусть A — точка приложения силы F (рис. 6.1), которую перенесем в точку B . В точке B возьмем уравновешенную систему сил ($F' = -F''$), при этом $F \parallel F' \parallel F''$ и $|F| = |F'|$.

Значит,

$$(F', F'') \sim 0, \quad F' = F,$$

$$F' \sim (F, F', F'') \sim [F'(F, F'')].$$

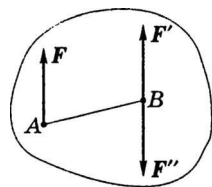


Рис. 6.1

Пара сил (F, F'') дает момент $M = BA \times F = M_B(F)$.

Следовательно, получили силу F , приложенную в точке B , и пару сил (F', F'') с моментом M . Лемма доказана.

Рассмотрим несколько примеров на применение данной леммы.

Пример 1. Чтобы удержать в равновесии однородный брус AB длиной $2a$ и весом P , надо приложить в его середине C направленную вверх силу Q , по модулю равную P (рис. 6.2, а).

Согласно лемме силу Q заменим силой Q' , приложенной к концу A бруса, и парой с моментом $M = Qa$. Если плечо этой

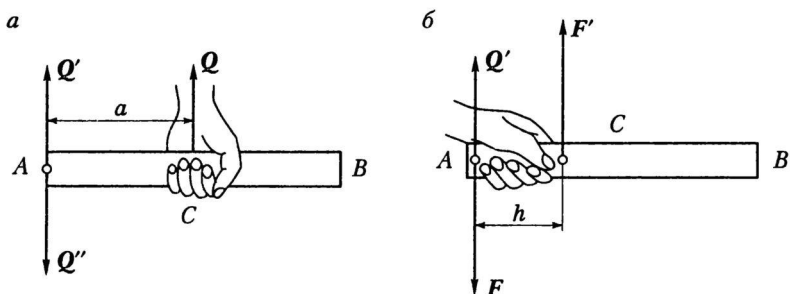


Рис. 6.2

пары уменьшить до величины h (рис. 6.2, б), то образующие ее силы F , F' надо увеличить так, чтобы $Fh = Qa$.

Следовательно, для удержания бруса за конец A необходимо, кроме силы Q' , приложить еще пару сил (F , F'), что непосредственно «ощущает» рука человека, удерживающая брус.

Пример 2. На барабан 1 радиусом r в противоположных направлениях намотаны две нити, к концам которых прикладывают силы F и $F' = -F$ (рис. 6.3); на барабан 2 того же радиуса намотана одна нить, к которой прикладывают силу, равную $2F$.

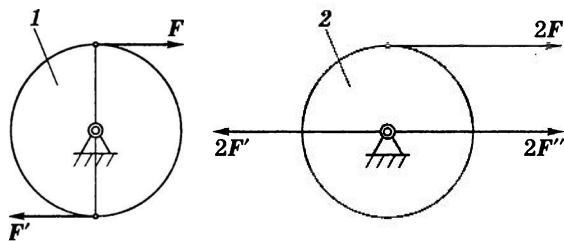


Рис. 6.3

На барабан 1 действует только пара сил (F , F') моментом $2Fr$, вращающая барабан. На основании леммы силу, действующую на барабан 2, заменим силой $2F'' = 2F$, приложенной к оси барабана. В результате на этот барабан действуют пара сил с моментом $2Fr$, вращающая барабан, и сила $2F''$, создающая давление на ось барабана.

Анализ силового нагружения показывает, что оба барабана будут вращаться одинаково. Но при этом ось барабана 2 испытывает давление, равное $2F$, а ось барабана 1 никакого давления не испытывает.

6.2. Основная теорема статики

Пусть дана произвольная система сил ($F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$), приложенных к твердому телу. Сумму этих сил

$$F = \sum_{k=1}^n F_k$$

называют *главным вектором системы сил*.

Сумму моментов сил относительно какого-либо полюса O (центра приведения) называют *главным моментом* рассматриваемой *системы сил* относительно этого полюса:

$$M_0 = \sum M_{0i}.$$

Теорема Пуансо: всякую пространственную систему сил в общем случае можно заменить эквивалентной системой, состоящей из одной силы, приложенной в какой-либо точке тела (центре приведения) и равной главному вектору данной системы сил, и одной пары сил, момент которой равен главному моменту всех сил системы относительно выбранного центра приведения.

Пусть начало системы координат является центром приведения (точка O на рис. 6.4, а). r_i ($i = 1, 2, \dots, n$) — радиус-векторы точек приложения сил F_1, F_2, \dots, F_n . Перенесем

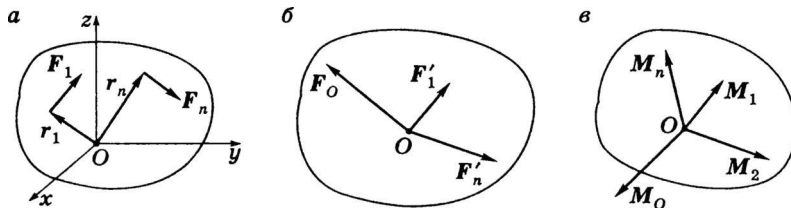


Рис. 6.4

силы F_1, F_2, \dots, F_n в точку O , присоединив при этом соответствующие пары.

Тогда на тело будет действовать система сил, приложенных в точке O :

$$F'_1 = F_1; \quad F'_2 = F_2 \dots F'_n = F_n,$$

и система пар, моменты которых будут равны:

$$M_1 = M_O(F_1); \quad M_2 = M_O(F_2) \dots M_n = M_O(F_n).$$

Силы, приложенные в точке O , заменяются одной силой F_O , приложенной в той же точке (рис. 6.4, б). При этом

$$F_O = \sum_{i=1}^n F'_i = \sum_{i=1}^n F_i$$

назовем главным вектором системы.

Сложим геометрически векторы моментов образованных пар (рис. 6.4, в):

$$M_O = \sum_{i=1}^n M_i,$$

где M_O — главный момент силы относительно центра O .

Главный момент можно записать как

$$M_O = \sum_{i=1}^n r_i \times F_i.$$

Теорема Пуансо позволяет установить, к какому простейшему виду может быть приведена данная пространственная система сил. Для этого надо определить главный вектор системы и главный момент относительно произвольного центра O и исследовать полученные результаты.

Возможны следующие случаи:

1. Если для данной системы сил $F_O = 0$ и $M_O = 0$, то система находится в равновесии.

2. Если для данной системы сил $F_O = 0$, а $M_O \neq 0$, то система приводится к паре сил. В этом случае величина M_O не зависит от выбора центра O . Свободное тело под действием такой системы сил может (но не всегда) совершать чисто вращательное движение.

3. Если для данной системы сил $F_O \neq 0$, а $M_O = 0$, то система приводится к равнодействующей F_O , проходящей через центр O .

Свободное тело под действием такой системы сил может совершать чисто поступательное движение, если равнодействующая F_O проходит через центр тяжести тела.

4. Если для данной системы сил $F_O \neq 0$ и $M_O \neq 0$, и $M_O \perp F_O$, то эта система также приводится к одной равнодействующей, равной F_O , но не проходящей через центр O .

Действительно, при $M_O \perp F_O$ пара, изображаемая вектором M_O , и сила F_O лежат в одной плоскости (рис. 6.5). Тогда, выбрав силы пары F'_O и F''_O равными по модулю F_O и расположив их так, как показано на рис. 6.5, получим, что силы F_O и F''_O взаимно уравниваются и система заменится одной равнодействующей через $F' = F_O$, проходящей через точку O' .

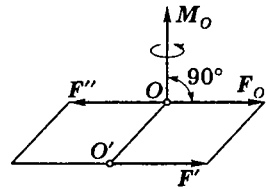


Рис. 6.5

5. Если $F_O \neq 0$ и $M_O \neq 0$, при этом $F_O \parallel M_O$, то данная система сил приводится к совокупности силы F_O и пары (Q, Q') , лежащей в плоскости, перпендикулярной силе F_O . Такая система сил называется *динамическим винтом* или *динамой*, а прямая, вдоль которой направлена сила F_O , — *осью динамы*.

6. Если $F_O \neq 0$ и $M_O \neq 0$, при этом векторы M_O и F_O не перпендикулярны друг другу и не параллельны, то такая система сил также приводится к динаме, однако ось этой динамы не будет проходить через точку O .

Аналитическое определение главного вектора и главного момента



пространственной системы сил

Запишем проекции главного вектора F_O на координатные оси x, y, z :

$$F_{Ox} = \sum_{k=1}^n F_{kx} = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx},$$

$$F_{Oy} = \sum_{k=1}^n F_{ky} = F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny},$$

$$F_{Oz} = \sum_{k=1}^n F_{kz} = F_{1z} + F_{2z} + \dots + F_{nz}.$$

Численное значение F_O определяется как

$$F_O = \sqrt{F_{Ox}^2 + F_{Oy}^2 + F_{Oz}^2}.$$

Направление F_O в пространстве определим через направляющие косинусы

$$\cos(x, F_O) = \frac{F_{Ox}}{F_O}; \quad \cos(y, F_O) = \frac{F_{Oy}}{F_O}; \quad \cos(z, F_O) = \frac{F_{Oz}}{F_O}.$$

Аналогично запишем проекции главного момента на оси x , y , z :

$$M_{Ox} = \sum_{k=1}^n (y_k F_{kz} - z_k F_{ky}),$$

$$M_{Oy} = \sum_{k=1}^n (z_k F_{kz} - x_k F_{ky}),$$

$$M_{Oz} = \sum_{k=1}^n (x_k F_{kz} - y_k F_{ky}).$$

Численное значение

$$M_O = \sqrt{M_{Ox}^2 + M_{Oy}^2 + M_{Oz}^2}.$$

Направление M_O в пространстве вычисляется как

$$\cos(x, M_O) = \frac{M_{Ox}}{M_O}; \quad \cos(y, M_O) = \frac{M_{Oy}}{M_O}; \quad \cos(z, M_O) = \frac{M_{Oz}}{M_O}.$$

$$\begin{aligned} \cos(F_O, M_O) &= \frac{F_O M_O}{F_O M_O} = \frac{F_{Ox} M_{Ox} + F_{Oy} M_{Oy} + F_{Oz} M_{Oz}}{F_O M_O} = \\ &= \cos(x, F_O) \cos(x, M_O) + \cos(y, F_O) \cos(y, M_O) + \\ &\quad + \cos(z, F_O) \cos(z, M_O). \end{aligned}$$

В последнем выражении учтено, что $F_O \cdot M_O$ — скалярное произведение векторов, где

$$F_O = F_{Ox} \cdot i + F_{Oy} \cdot j + F_{Oz} \cdot k,$$

$$M_O = M_{Ox} \cdot i + M_{Oy} \cdot j + M_{Oz} \cdot k.$$

Изменение главного момента при перемене центра приведения. Заметим, что сила F_O , равная главному вектору, т.е. сумме всех сил системы, для любого центра приведения будет одной и той же: $F_O = F_{O_1}$, где O_1 — новый центр приведения (рис. 6.6).

Главный момент относительно нового центра O_1

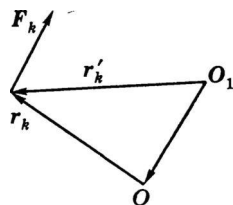


Рис. 6.6

$$\begin{aligned} M_{O_1} &= \sum_{k=1}^n r'_k \times F_k = \sum_{k=1}^n (r_k + O_1O) \times F_k = \\ &= \sum_{k=1}^n r_k \times F_k + O_1O \times \sum_{k=1}^n F_k = M_O + M_{O_1}(F_O). \end{aligned}$$

Главный момент системы сил при перемене центра приведения изменяется на момент силы, равной главному вектору, приложенному в начальном центре приведения.

Таким образом, если в каком-либо центре приведения $F_O = 0$ и $M_O = 0$, то для любого центра приведения O_1 : $F_{O_1} = 0$ и $M_{O_1} = 0$.

Условия равновесия пространственной системы сил

6.4. и системы параллельных сил

Теорема: для равновесия пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы главный вектор и главный момент этой системы равнялись нулю:

$$F_O = 0, \quad M_O = 0.$$

Данные условия можно переписать в виде шести уравнений равновесия:

$$1. F_{Ox} = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = 0, \text{ или } \sum_k F_{kx} = 0.$$

$$2. F_{Oy} = F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} = 0, \text{ или } \sum_k F_{ky} = 0.$$

$$3. F_{Oz} = F_{1z} + F_{2z} + \dots + F_{nz} = 0, \text{ или } \sum_k F_{kz} = 0.$$

$$4. M_{Ox}(F_1) + M_{Ox}(F_2) + \dots + M_{Ox}(F_n) = 0, \text{ или } \sum_k M_x(F_k) = 0.$$

$$5. M_{Oy}(F_1) + M_{Oy}(F_2) + \dots + M_{Oy}(F_n) = 0, \text{ или } \sum_k M_y(F_k) = 0.$$

$$6. M_{Oz}(F_1) + M_{Oz}(F_2) + \dots + M_{Oz}(F_n) = 0, \text{ или } \sum_k M_z(F_k) = 0.$$

Таким образом, при решении задач о равновесии пространственной системы сил, приложенных к твердому телу, можно определить шесть неизвестных величин из вышепредставленных уравнений.

При решении задач неизвестную по модулю и направлению силу следует разложить на три составляющие, параллельные осям координат. При этом необязательно, чтобы оси, на которые проецируют силы, совпадали с осями, относительно которых берутся моменты.

Как и в случае системы сил на плоскости, уравнения проекций упрощаются, если оси, на которые проецируют силы, перпендикулярны одной или нескольким неизвестным силам. Прикладывать моменты удобно относительно осей, параллельных линиям действий неизвестных сил или их пересекающих (моменты таких сил будут равны нулю и уравнения равновесия будут упрощены).

Рассмотрим равновесие пространственной системы параллельных сил (рис. 6.7). Все силы параллельны оси Oz , поэтому проекции сил на оси Ox и Oy и момент

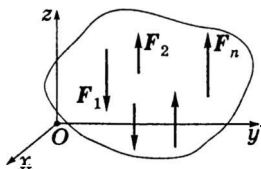


Рис. 6.7

сил относительно оси Oz равны нулю. Таким образом, условиями, определяющими равновесие системы, будут уравнения

$$\begin{aligned} \Sigma F_{kz} &= 0, & F_{Oz} &= F_{1z} + F_{2z} + \dots + F_{nz} = 0, \\ \Sigma M_{kx} &= 0, & M_{Ox}(F_1) + M_{Ox}(F_2) + \dots + M_{Ox}(F_n) &= 0, \\ \Sigma M_{ky} &= 0, & M_{Oy}(F_1) + M_{Oy}(F_2) + \dots + M_{Oy}(F_n) &= 0. \end{aligned}$$

Задача. На горизонтально расположенный вал AD (рис. 6.8), который может вращаться в подшипниках A и B , насажены шкив D , соединенный ременной передачей с двигателем, и зубчатое колесо C , зацепленное с другим зубчатым колесом C_1 . Натяжения ветвей ременной передачи горизонтальны, их модули $q = 2$ кН, $Q = 2q$, $a = b = 0,3$, $c = 0,2$ м. Радиусы колес: $r_1 = 0,4$ м, $r_2 = 0,2$ м.

В положении равновесия определить модуль действующей на колесо C горизонтальной силы P , перпендикулярной к оси вала, и реакции подшипников A и B , вызываемые натяжениями ремней.

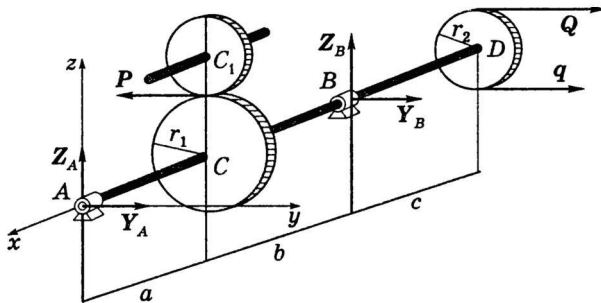


Рис. 6.8

Решение.

Рассмотрим равновесие вала AD , к которому приложены активные силы P , q , Q и реакции R_A и R_B подшипников A и B . R_A и R_B перпендикулярны к поверхностям соответствующих подшипников. Каждую из них разложим на две составляющие — горизонтальную и вертикальную: Y_A и Z_A , Y_B и Z_B .

В данной задаче пять неизвестных — Y_A, Z_A, Y_B, Z_B, P . Запишем уравнение равновесия.

Сумма проекций всех сил на ось x будет тождественно равна нулю, так как все силы перпендикулярны к этой оси ($\sum F_{kx} \equiv 0$).

Запишем оставшиеся пять уравнений:

$$1) \sum F_{ky} = 0; Y_A - P + Y_B + Q + q = 0;$$

$$2) \sum F_{kz} = 0; Z_A + Z_B = 0;$$

$$3) \sum M_x = 0; Pr_1 - Qr_2 + qr_2 = 0;$$

$$4) \sum M_y = 0; Z_B(a+b) = 0;$$

$$5) \sum M_z = 0; Pa - Y_B(a+b) - Q(a+b+c) - q(a+b+c) = 0.$$

Решив уравнения, найдем

$$Y_A = 2,5 \text{ кН}, \quad Z_A = 0, \quad P = 1 \text{ кН}, \quad Y_B = -7,5 \text{ кН}, \quad Z_B = 0.$$

Знак минус в выражении для Y_B показывает, что сила Y_B противоположна направлению, указанному на рисунке.

О т в е т: $Y_A = 2,5 \text{ кН}, Z_A = 0, P = 1 \text{ кН}, Y_B = -7,5 \text{ кН}, Z_B = 0.$

Приведение плоской системы сил к простейшему виду

6.5.

Рассмотрим систему сил (F_1, F_2, \dots, F_n), расположенных в одной плоскости Oxy (рис. 6.9). Выбрав начало системы координат Oxy за центр приведения, приведем рассматриваемую систему сил к одной силе (главному вектору)

$$F_O = \sum_{k=1}^n F_k$$

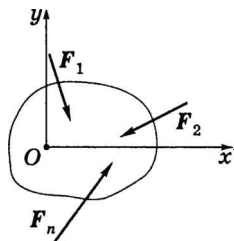


Рис. 6.9

и к паре сил, момент которой равен главному моменту:

$$M_O = \sum_{k=1}^n M_O(F_k).$$

Упрощение системы сил зависит от значений главного вектора F_O и главного момента M_O .

1. Если $F_O \neq 0$, то данная система сил эквивалентна одной силе, т.е. приводится к равнодействующей.

Пусть для выбранного центра приведения $F_O \neq 0$ и $M_O \neq 0$ (рис. 6.10, а). Дуговая стрелка на рисунке символически обозначает пару с моментом M_O . Подберем пару сил (F_1, F'_1) , момент которой будет равен M_O (рис. 6.10, б), т.е. $M_O = M(F_1, F'_1)$, причем

$$F_1 = F'_1 = F_O, \quad h = \frac{M_O}{F_O}.$$

В точке O действует уравновешенная система сил и ее можно отбросить. Следовательно, заданная система сил эквивалентна одной силе F_1 , приложенной к точке O_1 (рис. 6.10, в).

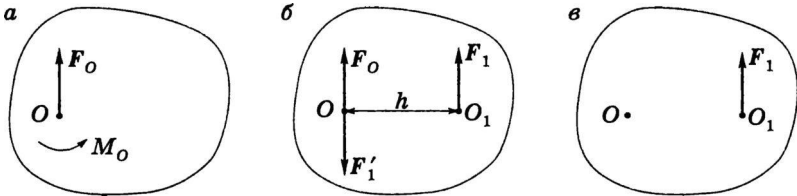


Рис. 6.10

2. Если $F_O \neq 0$ и $M_O \neq 0$, то система сил приводится к равнодействующей, проходящей через точку O_1 . При этом

$$OO_1 = \frac{M_O}{F_O}.$$

3. Если $F_O \neq 0$, $M_O = 0$, то система сил приводится к равнодействующей R , проходящей через центр приведения O .

4. Если $F_O = 0$ и $M_O \neq 0$, то система сил эквивалентна паре.

5. Если $F_O = 0$ и $M_O = 0$, то система сил эквивалентна нулю, т.е. система сил уравновешена.

Рассмотрим решение некоторых типичных задач.

Задача 1. Привести к простейшему виду систему сил (P_1 , P_2 , P_3), действующих на балку AB (рис. 6.11). Найти давления на опоры A и B , если $P_1 = P_2 = P_3 = P$.

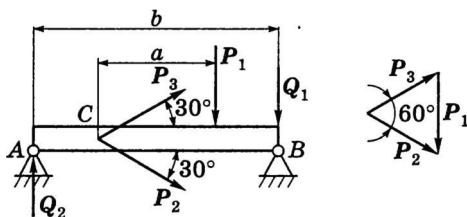


Рис. 6.11

Решение.

Многоугольник, построенный из сил P_1 , P_2 , P_3 , замкнут; следовательно, $R = 0$. Сумма моментов всех сил относительно любой точки (например точки C) равна Pa . Значит, данная система сил приводится к паре с моментом $M = -Pa$ (случай 4). Располагая эту пару так, как показано на рисунке, заключаем, что силы P_1 , P_2 , P_3 оказывают на опоры давления Q_1 и Q_2 , численно равные $\frac{Pa}{b}$.

О т в е т: $Q_1 = Q_2 = \frac{Pa}{b}$.

Задача 2. Привести к простейшему виду систему сил (F_1 , F_2 , F_3), действующих на ферму AB (рис. 6.12). Найти давления на опоры A и B , если $F_1 = F_2 = F_3 = F$.

Решение.

Силы F_2 и F_3 образуют пару. Перемещаем ее в положение, показанное на рисунке пунктиром. Тогда силы F_1 и F_3' взаимно уравновешиваются и вся система сил приводится к равнодействующей $R = F_2' = F$.

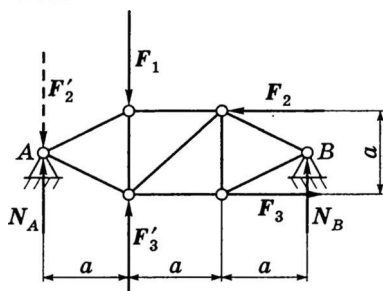


Рис. 6.12

Отсюда заключаем, что действие сил F_1 , F_2 , F_3 сводится к вертикальному давлению на опору A , а опора B при этом не нагружена.

О т в е т: $N_A = F$, $N_B = 0$.

Теорема Вариньона: если рассматриваемая система сил приводится к равнодействующей, то момент этой равнодействующей относительно какой-либо точки равен алгебраической сумме моментов всех сил данной системы относительно той же точки.

Доказательство. Пусть система сил приводится к равнодействующей R , проходящей через точку O . Возьмем за центр приведения новую точку O_1 . Главный момент всех сил системы относительно центра O_1

$$M_{O_1} = \sum_{k=1}^n M_{O_1}(F_k),$$

однако

$$M_{O_1} = M_O + M_{O_1}(R),$$

но для центра приведения O

$$M_O = 0.$$

Таким образом,

$$M_{O_1}(R) = \sum_{k=1}^n M_{O_1}(F_k).$$

При помощи теоремы Вариньона можно найти линию действия равнодействующей.

Пусть равнодействующая R_1 приложена в точке O_1 (рис. 6.13). Известны главный вектор F_O и главный момент M_O при центре приведения в начале координат:

$$M_{Oz} = M_{Oz}(R_1) = xF_{Oy} - yF_{Ox}. \quad (6.1)$$

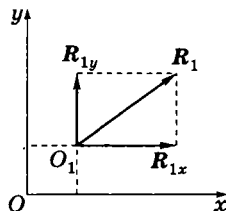


Рис. 6.13

M_{Oz} , F_{Oy} , F_{Ox} при переносе R_1 вдоль линии действия не изменяются. Следовательно, в уравнении (6.1) x и y — текущие координаты линии действия равнодействующей.

Таким образом, уравнение линии равнодействующей запишем как

$$y = \frac{F_{Oy}}{F_{Ox}} x - \frac{M_{Oz}}{F_{Ox}} \quad (F_{Ox} \neq 0).$$

Условия равновесия плоской

6.6. системы сил

Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

1-я основная форма уравнений равновесия:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, \\ \sum F_{ky} = 0, \\ \sum M_O(F_k) = 0; \end{cases}$$

2-я форма уравнений равновесия, где точки A , B , C не лежат на одной прямой:

$$\begin{cases} \sum M_A(F_k) = 0, \\ \sum M_B(F_k) = 0, \\ \sum M_C(F_k) = 0; \end{cases}$$

3-я форма уравнений равновесия, ось x не перпендикулярна к отрезку AB (рис. 6.14):

$$\begin{cases} \sum M_A(\mathbf{F}_k) = 0, \\ \sum M_B(\mathbf{F}_k) = 0, \\ \sum F_{kx} = 0. \end{cases}$$

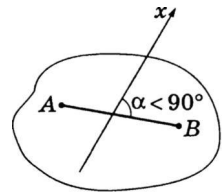


Рис. 6.14

Равновесие плоской системы параллельных сил. Когда все действующие на тело силы параллельны друг другу, то можно направить ось Ox перпендикулярно к силам, а ось Oy — параллельно им (рис. 6.15). Тогда проекция каждой из сил на ось Ox будет равна нулю. В результате для параллельных сил останутся два условия равновесия:

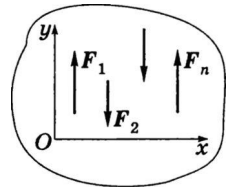


Рис. 6.15

$$\sum F_{ky} = 0, \quad \sum M_O(\mathbf{F}_k) = 0.$$

Другая форма условий равновесия для параллельных сил имеет вид

$$\sum m_A(\mathbf{F}_k) = 0, \quad \sum m_B(\mathbf{F}_k) = 0.$$

При этом точки A и B не должны лежать на прямой, параллельной силам.

Понятие о статически

6.7. неопределимых задачах

Методами статики могут быть решены лишь задачи, содержащие неизвестные, число которых равно числу уравнений равновесия. Такие задачи называются *статически определенными*.

В противоположность им *статически неопределимыми* являются задачи, в которых число неизвестных сил больше числа уравнений равновесия.

Примером статически неопределимой задачи может служить нахождение реакций опор балки, лежащей в плоскости Axy на двух шарнирно-неподвижных опорах, при условии, что среди приложенных к балке сил имеются силы, не перпендикулярные к оси балки (рис. 6.16). Определить четыре неизвестные силы X_A , Y_A , X_B и Y_B с помощью трех уравнений равновесия невозможно.

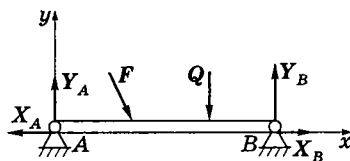


Рис. 6.16

Если приложенные к этой же балке силы перпендикулярны к ее оси, то реакции опор также перпендикулярны к оси. Определить две неизвестные силы Y_A и Y_B в случае равновесия плоской системы параллельных сил возможно. Эта задача статически определима.

Следует составлять условия равновесия, применяя ту из форм этих условий, которая приводит к более простой системе уравнений. Наиболее простой будет система уравнений, в каждое из которых входит по одному неизвестному.

При составлении уравнения проекций необходимо проводить координатную ось перпендикулярно к какой-нибудь известной силе; при составлении уравнения моментов брать центр моментов в точке, где пересекается больше неизвестных сил.

6.8. Распределенные силы

Силы, приложенные на некоторой части объема, поверхности или вдоль некоторой линии, называются *распределенными силами*. Величина этих сил, приходящаяся на единицу объема, поверхности или длины линии, называется *интенсивностью распределенной силы*.

Например, вес отдельных частей призмы, поставленной на горизонтальную пластину, образуют систему параллельных сил, распределенных по объему призмы. Давление призмы на пластину π распределено по площади $A_1A_2B_2B_1$ (рис. 6.17, а).

Если толщина призмы мала, то можно считать эти силы распределенными вдоль прямой AB (рис. 6.17, б). Интенсивность распределенной нагрузки q изменяется от нуля до максимального значения q_{\max} . Равнодействующая этих сил есть вес призмы Q , который при постоянной толщине призмы пропорционален площади треугольника ABC . Поэтому сила

$$Q = \frac{1}{2} a q_{\max}$$

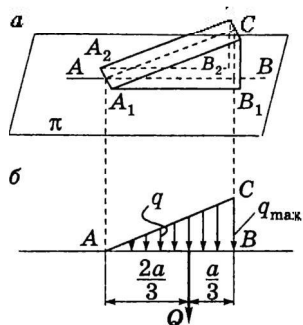


Рис. 6.17

и приложена на расстоянии $a/3$ от стороны BC .

Если силы распределены по произвольному закону вдоль прямой, то равнодействующая этих сил по модулю равна площади фигуры $ABDE$ и приложена в центре тяжести этой фигуры (рис. 6.18, а).

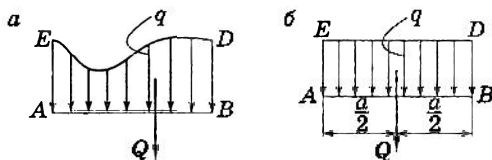


Рис. 6.18

Если интенсивность силы q является постоянной (рис. 6.18, б), то такая нагрузка называется *равномерно распределенной*, и ее равнодействующая $Q = qa$ приложена в середине отрезка AB .

Измеряется интенсивность q в Ньютонах, деленных на метры (Н/м).

Задача. Балка AB длиной l м несет распределенную нагрузку (рис. 6.19). Интенсивность нагрузки равна q на концах A и B балки и $2q$ в середине балки. Пренебрегая весом балки, найти реакции опор D и B .

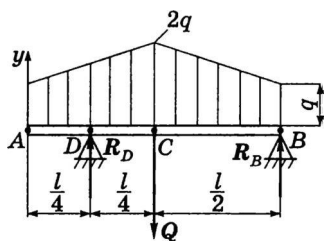


Рис. 6.19

Решение.

Заменим распределенную нагрузку эквивалентной ей сосредоточенной силой. В силу симметрии она приложена в середине пролета AB в точке C . Представим $Q = Q_1 + Q_2$, где Q_1 и Q_2 — суммарное усилие от прямоугольной и треугольной нагрузки соответственно. Численно они равны площадям соответствующих фигур:

$$Q_1 = ql, \quad Q_2 = \frac{ql}{2} \Rightarrow Q = \frac{3ql}{2}.$$

Уравнения равновесия при действующей нагрузке Q представим в виде:

$$\text{для } \sum M_{iD} = 0 \quad -Q \frac{l}{4} + R_B \frac{3}{2}l = 0;$$

$$\text{для } \sum M_{iB} = 0 \quad -R_D \frac{3}{4}l + Q \frac{l}{2} = 0.$$

Получим

$$R_B = \frac{Q}{3} = \frac{1}{2}ql \text{ Н}, \quad R_D = \frac{2}{3}Q = ql \text{ Н}.$$

$$\text{Ответ: } R_B = \frac{Q}{3} = \frac{1}{2}ql \text{ Н}, \quad R_D = \frac{2}{3}Q = ql \text{ Н}.$$

Статические инварианты.

6.9. Динамический винт

Первым статическим инвариантом называется главный вектор системы сил F_O . В более узком смысле под первым статическим инвариантом понимают квадрат модуля главного вектора:

$$I_1 = F_O^2 = F_x^2 + F_y^2 + F_z^2.$$

Вторым статическим инвариантом называется скалярное произведение главного вектора на главный момент:

$$I_2 = F_O M_O = F_x M_x + F_y M_y + F_z M_z.$$

Покажем, что I_2 не зависит от выбора центра приведения. Пусть O_1 — новый центр приведения, тогда

$$M_{O_1} = M_O + O_1 O \times F_O,$$

$$M_{O_1} F_O = M_O F_O + (O_1 O \times F_O) \cdot F_O = M_O F_O.$$

Совокупность силы и пары сил с моментом, коллинеарным силе, называется *динамическим винтом* или *динамой*.

Различают правый (рис. 6.20, а) и левый (рис. 6.20, б) винты, составленные из главного вектора системы сил F_O и главного момента M_O системы сил.

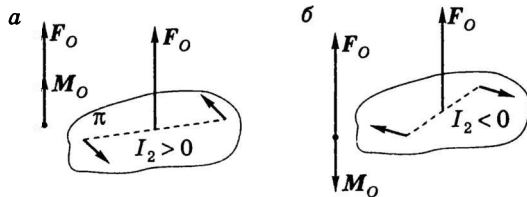


Рис. 6.20

Теорема: если второй статический инвариант не равен нулю, то систему сил можно привести к динаме.

Так как $I_2 = F_O \cdot M_O \neq 0$, то $F_O \neq 0$ и $M_O \neq 0$; F_O не параллельна $M_O \cdot M^*$, M_1 — составляющая M_O (рис. 6.21, а).

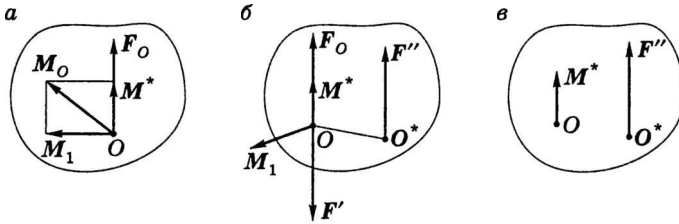


Рис. 6.21

M_1 — момент пары сил (F' , F''), причем $F' = -F'' = -F_O$ (рис. 6.21, б). Система (F_O , F') ~ 0, поэтому ее можно отбросить (рис. 6.21 в). Перенесем M^* из точки O в точку O^* (см. рис. 6.21 в). M^* — свободный вектор. $F'' = F'' \parallel M^*$, следовательно, динамический винт

$$|F'_1| = |F''| = |F_O|.$$

Центральная ось.

6.10. Уравнение центральной оси

Точка O^* не единственная, где система сил приводится к динаме. Силу можно переносить вдоль линии ее действия, инвариант пары сил — свободный вектор, следовательно, система сил может быть приведена к динаме во всех точках прямой, проходящей через точку O^* и являющейся линией действия силы $F'' = F_O$. Эта прямая называется **центральной осью системы сил**.

Найдем уравнение центральной оси.

O^* — точка центральной оси (рис. 6.22).

Запишем зависимости главного момента при перемене точки приведения:

$$M_O^* = M_O + O^*O \times F_O = M_O - OO^* \times F_O. \quad (6.2)$$

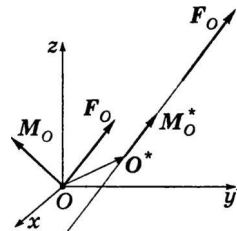


Рис. 6.22

Условие коллинеарности M_O^* и F_O :

$$pF_O = M_O^*,$$

где p — параметр винта, имеющий размерность длины.

Так как

$$\begin{aligned} F_O &= F_x i + F_y j + F_z k, \\ M_O &= M_{Ox} i + M_{Oy} j + M_{Oz} k, \\ OO^* &= xi + yj + zk, \end{aligned}$$

то уравнение (6.2) будет иметь вид

$$\begin{aligned} p(F_x i + F_y j + F_z k) &= M_{Ox} i + M_{Oy} j + M_{Oz} k - \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \\ &= [M_{Ox} - (yF_z - zF_y)] i + [M_{Oy} - (zF_x - xF_z)] j + [M_{Oz} - (xF_y - yF_x)] k. \end{aligned}$$

Из этого уравнения получим уравнение центральной оси:

$$\frac{M_{Ox} - (yF_z - zF_y)}{F_x} = \frac{M_{Oy} - (zF_x - xF_z)}{F_y} = \frac{M_{Oz} - (xF_y - yF_x)}{F_z} = p.$$

Частные случаи приведения

6.11. пространственной системы сил

В табл. 6.1 показано, к чему приводится пространственная система сил в зависимости от значений главного вектора и главного момента.

Если все силы находятся в одной плоскости, например в плоскости Oxy , то их проекции на ось z и моменты относительно осей x и y будут равны нулю.

Следовательно, $F_z = 0$, $M_{Ox} = 0$, $M_{Oy} = 0$ и $I_2 = F_O \cdot M_O = 0$.

Тот же результат получаем и для пространственной системы параллельных сил. Если все силы параллельны на оси z , то $F_x = 0$, $F_y = 0$, $M_{Oz} = 0$, следовательно $I_2 = 0$.

Таблица 6.1

Таблица инвариантов

$I_2 = F_O M_O$	F_O	M_O	Случай приведения
$I_2 \neq 0$	$F_O \neq 0$	$M_O \neq 0$	Динамический винт
$I_2 = 0$	$F_O \neq 0$	$M_O \neq 0$ $M_O = 0$	Равнодействующая
$I_2 = 0$	$F_O = 0$	$M_O \neq 0$	Пара сил
$I_2 = 0$	$F_O = 0$	$M_O = 0$	Система сил эквивалентна нулю

Таким образом, плоская система сил и система параллельных сил в пространстве не приводятся к динамическому винту.

Задача. К вершинам куба, ребра которого имеют длину $a = 5$ см, приложено шесть равных по модулю сил, по 2 Н каждая (рис. 6.23). Привести эту систему к простейшему виду.

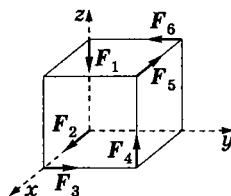


Рис. 6.23

Решение.

Найдем проекции главного вектора и главного момента на координатные оси:

$$F_x = F_2 - F_5 = 0,$$

$$F_y = F_3 - F_6 = 0,$$

$$F_z = F_4 - F_1 = 0.$$

Следовательно, главный вектор

$$F_O = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = 0.$$

Найдем моменты сил относительно осей x , y , z :

$$M_x = F_4 a + F_6 a = 2Fa = 20 \text{ Н} \cdot \text{см},$$

$$M_y = -F_4 a - F_5 a = -2Fa = -20 \text{ Н} \cdot \text{см},$$

$$M_z = F_3 a + F_5 a = 2Fa = 20 \text{ Н} \cdot \text{см}.$$

Главный момент

$$M_O = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = 20\sqrt{3} \text{ Н} \cdot \text{см},$$

следовательно, $F_O = 0$; $M_O \neq 0$.

Направляющие косинусы главного момента сил с осями координат:

$$\cos \alpha = \frac{M_x}{M_O} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\cos \beta = \frac{M_y}{M_O} = -\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\cos \gamma = \frac{M_z}{M_O} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

где α , β , γ — углы между вектором M_O и осями Ox , Oy и Oz соответственно.

О т в е т: $F_O = 0$, $M_O = 20\sqrt{3} \text{ Н} \cdot \text{см}$.

7

РАСЧЕТ РАВНОВЕСИЯ СИСТЕМЫ ТЕЛ И ФЕРМ

7.1. Равновесие системы тел

На практике часто приходится решать задачи на равновесие системы тел. При этом реакции внутренних связей попарно равны по модулю и противоположны по направлению. Для конструкции из n тел, на каждое из которых действует произвольная плоская система сил, получится $3n$ уравнений, позволяющих найти $3n$ неизвестных (при других системах сил число уравнений соответственно изменится). Если окажется, что число уравнений равновесия составного тела меньше числа неизвестных, то дополнительно рассматривают равновесие одного или нескольких тел, входящих в составное.

Задача. Кронштейн состоит из горизонтального бруса AD (рис. 7.1, *a*) весом $P_1 = 15$ Н, прикрепленного к стене шарниром A , и подкоса CB весом $P_2 = 12$ кг, который соединен шарнирами с брусом AD и со стеной. К концу D бруса подвешен

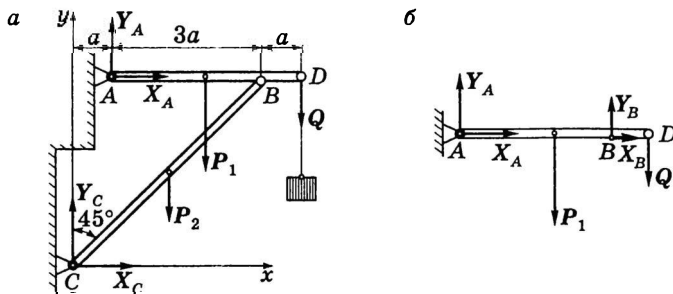


Рис. 7.1

груз весом $Q = 30$ кг. Необходимые размеры указаны на рисунке. Определить реакции шарниров A и C , считая брус и подкос однородными.

Решение.

Рассмотрим равновесие кронштейна в целом. Запишем уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} \equiv X_A + X_C = 0,$$

$$\sum F_{ky} \equiv Y_A + Y_C - P_1 - P_2 - Q = 0,$$

$$\sum M_A(F_k) \equiv X_C \cdot 4a - Y_C a - P_2 a - P_1 \cdot 2a - Q \cdot 4a = 0.$$

Полученные три уравнения содержат четыре неизвестных X_A , Y_A , X_C , Y_C . Для решения задачи дополнительно рассмотрим условия равновесия бруса AD (рис. 7.1, б). На него действуют силы P_1 , Q и реакции X_A , Y_A , X_B , Y_B .

Составим четвертое уравнение:

$$\sum M_B(F_k) \equiv -Y_A \cdot 3a + P_1 a - Q a = 0.$$

Из четырех составленных уравнений найдем

$$Y_A = \frac{1}{3}(P_1 - Q) = -5 \text{ Н},$$

$$Y_C = \frac{2}{3}P_1 + P_2 + \frac{4}{3}Q = 62 \text{ Н},$$

$$X_C = \frac{2}{3}P_1 + \frac{1}{2}P_2 + \frac{4}{3}Q = 56 \text{ Н},$$

$$X_A = -X_C = -56 \text{ Н}.$$

Реакции шарнира B , если их надо определить, находятся из уравнений проекций на оси x и y сил, действующих на брус AD : $X_B = -X_A = 56$ Н; $Y_B = P_1 + Q - Y_A = 50$ Н.

Отметим, что при решении значение каждой из величин должно подставляться в последующее уравнение с тем знаком, с которым эта величина получилась при решении предыду-

щего уравнения. Например, в последнее равенство вместо Y_A подставляется -5 Н, а не 5 Н.

О т в е т: $X_A = -56$ Н, $Y_A = -5$ Н, $X_C = 56$ Н, $Y_C = 62$ Н.

7.2. Аналитический расчет плоских ферм

В 4.9 уже было дано определение ферм и представлено решение задачи на нахождение усилия в стержнях. Рассмотрим методы расчета ферм более подробно.

Если все стержни фермы лежат в одной плоскости, ферма называется *плоской*. Места соединения стержней фермы называют *узлами*. Все внешние нагрузки к ферме прикладываются только в узлах. При расчете фермы трением в узлах и весом стержней пренебрегают или распределяют вес по узлам. Тогда на каждый из стержней фермы будут действовать две силы, приложенные к его концам и при равновесии всегда направленные вдоль стержня. Стержни фермы работают или на растяжение, или на сжатие.

Рассмотрим жесткие фермы без лишних стержней, образованные из треугольников. В таких фермах число стержней k и число узлов n связаны соотношением $k = 2n - 3$.

При меньшем числе стержней ферма не будет жесткой, а при большем числе она будет статически неопределимой.

Расчет фермы сводится к определению опорных реакций и усилий в ее стержнях.

Опорные реакции найдем обычными методами статики (рассматриваем ферму как твердое тело). Определим усилия в стержнях.

Метод вырезания узлов. Этот метод сводится к последовательному рассмотрению условий равновесия сил, сходящихся в каждом из узлов фермы.

Пусть ферма образована из одинаковых равнобедренных прямоугольных треугольников. Действующие на ферму силы параллельны оси x и равны между собой (рис. 7.2, а):

$$F_1 = F_2 = F_3 = F = 2T.$$

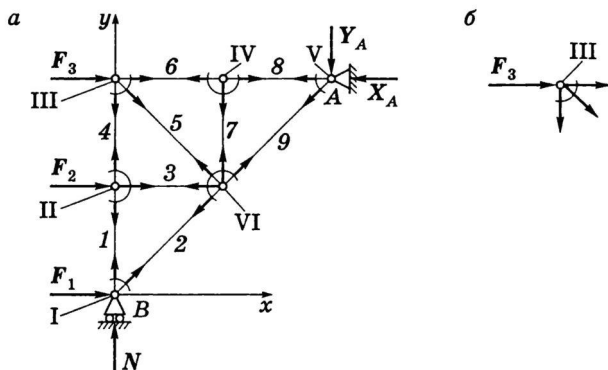


Рис. 7.2

Пронумеруем узлы и стержни фермы. Условие $k = 2n - 3$ выполняется: число узлов $n = 6$, а число стержней $k = 9$. Из уравнений равновесия, составленных для фермы в целом,

$$X_A = 3F = 6T,$$

$$Y_A = N = \frac{3}{2}F = 3T.$$

Искомые усилия будем обозначать S_1 (в стержне 1), S_2 (в стержне 2) и т.д. «Отрежем» мысленно все узлы вместе со сходящимися в них стержнями от остальной фермы. Действие отброшенных частей стержней заменим силами, которые будут направлены вдоль соответствующих стержней и численно равны искомым усилиям S_1, S_2, \dots . Изобразим эти силы на рисунке, направив их от узлов, т.е. считаем все стержни растянутыми (см. рис. 7.5 а). На рис. 7.2, б приведен пример отдельного рассмотрения узла III. Если в результате решения усиление в стержне получается со знаком «плюс», то стержень растянут, если со знаком «минус», то стержень сжат.

Для узла I уравнения в проекциях на оси x и y :

$$F_1 + S_2 \cos 45^\circ = 0, \quad N + S_1 + S_2 \sin 45^\circ = 0.$$

Отсюда

$$S_2 = -F\sqrt{2} = -2,82T, \quad S_1 = -N - S_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{F}{2} = -T.$$

Теперь, зная S_1 , переходим к узлу II. Для него уравнения равновесия

$$S_3 + F_2 = 0, \quad S_4 - S_1 = 0,$$

откуда

$$S_3 = -F = -2T, \quad S_4 = S_1 = -T.$$

Определив S_4 , составим аналогично уравнения равновесия сначала для узла III, а затем для узла IV. Из этих уравнений

$$S_5 = -S_4\sqrt{2} = 1,41T, \quad S_6 = S_8 = -3T, \quad S_7 = 0.$$

Для вычисления S_9 составим уравнение равновесия сил, сходящихся в узле V, спроецировав их на ось Bu . Получим $Y_A + S_9 \cos 45^\circ = 0$, $S_9 = -3\sqrt{2} = -4,23T$.

Если в ходе расчета встретится узел, для которого число неизвестных больше двух, то можно воспользоваться методом сечений.

Метод сечений (метод Риттера). Этим методом удобно пользоваться для определения усилий в отдельных стержнях фермы. Ферму разделяют на две части сечением, проходящим через три стержня, в которых (или в одном из которых) требуется определить усилие, и рассматривают равновесие одной из этих частей. Действие отброшенной части заменяют соответствующими силами, направляя их вдоль разрезанных стержней от узлов, т.е. считая стержни растянутыми (как и в методе вырезания узлов). Затем составляют уравнения равновесия, выбирая центры моментов (или ось проекций) так, чтобы в каждое уравнение вошло только одно неизвестное усилие.

Задача. Определить усилие в стержне 15 фермы, изображенной на рис. 7.3. Действующие вертикальные силы $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = 2T$ параллельны между собой. Ферма лежит на опорах в точках A и L .

Решение.

Реакции опор определим из двух уравнений моментов, составленных относительно точек A и L , получим $N_1 = N_2 = 4T$.

Проведем сечение ab через стержни 2, 8, 15 и рассмотрим равновесие левой части фермы, заменив действие на нее правой части силами, направленными вдоль стержней 2, 8, 15. Чтобы найти S_{15} , составим уравнение моментов относительно точки C , где пересекаются стержни 2 и 8. Полагая $AD = DC = a$ и $BC \perp BE$, получим

$$-N_1 \cdot 2a + P_1 a + S_{15} CB = 0 \quad (CB = a\sqrt{2}).$$

Отсюда $S_{15} = 3\sqrt{2}T$; стержень растянут.

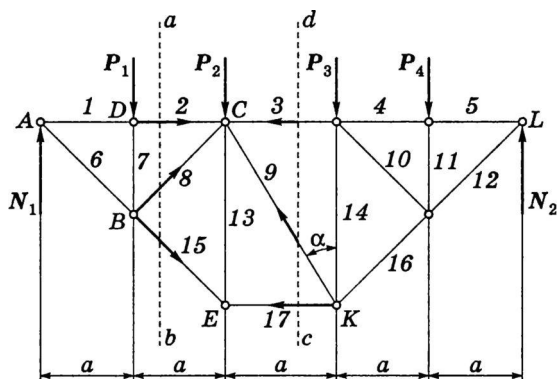


Рис. 7.3

Усилия в стержнях 2 и 8 можно найти, составив уравнения моментов относительно центров B (точка пересечения стержней 8, 15) и A (точка пересечения стержней 2, 15).

О т в е т: $S_{15} = 3\sqrt{2}T$.

8

ТРЕНИЕ

8.1. Равновесие с учетом трения

При движении одного тела по поверхности другого в области соприкосновения тел возникает сила сопротивления их относительному скольжению, называемая *силой трения скольжения*. Сила трения направлена в сторону, противоположную той, куда действующие силы стремятся сдвинуть тело.

Пусть два тела взаимодействуют друг с другом, соприкасаясь в точке A (рис. 8.1). К телу I приложена система сил (F_1, F_2, \dots, F_n). Тогда со стороны тела II на тело I будет действовать реакция R_A , которую можно разложить на две составляющие N_A и T_A , т.е. $R_A = N_A + T_A$, где N_A — нормальная реакция (давление); T_A — сила трения скольжения.

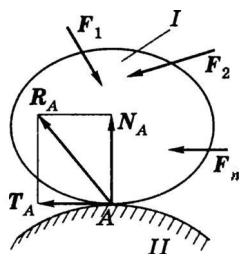


Рис. 8.1

Как показывает опыт, максимальная сила трения, при которой тело I начинает скользить по поверхности тела II , пропорциональна нормальному давлению, т.е. $F_{\text{тр max}} = fN$ — закон Амонтона — Кулона, где f — безразмерный коэффициент трения скольжения.

Значение коэффициента трения не зависит от площади соприкасающихся поверхностей, но зависит от их материала и степени шероховатости. Коэффициент трения устанавливается опытным путем и его значения приводятся в справочных таблицах.

В общем случае можно записать $F_A \leq fN_A$.

Случай строгого равенства отвечает максимальному значению силы трения. Это значит, что силу трения можно вычислить по формуле $F_A = fN_A$ только в тех случаях, когда

заранее известно, что имеет место критический случай, т.е. $F_A = F_{\text{тр max}}$. Во всех других случаях силу трения следует определять из уравнений равновесия.

8.2. Угол и конус трения

Пусть в результате действия активных сил и силы реакции R тело находится в состоянии предельного равновесия (рис. 8.2, а).

Угол φ между предельной реакцией R и нормалью N к поверхности называется *углом трения*.

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{F_{\text{тр max}}}{N} = f, \quad \operatorname{tg} \varphi = f.$$

В зависимости от действия активных сил направление R может изменяться в пространстве. Геометрическое место всех возможных направлений предельной реакции R образует коническую поверхность — *конус трения* (рис. 8.2, б, в). Если во всех направлениях $\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{const}$, то конус трения будет круговым, в противном случае — некруговым (рис. 8.2, г).

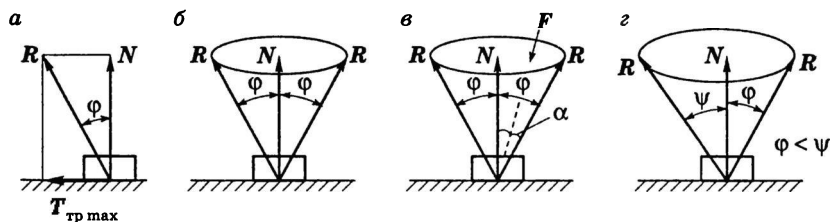


Рис. 8.2

Если равнодействующая активных сил F находится внутри конуса трения ($\alpha \leq \varphi$), то увеличением ее модуля нельзя нарушить равновесие тела (см. рис. 8.2, в).

Для того чтобы тело начало движение, необходимо и достаточно, чтобы равнодействующая активных сил F находилась вне конуса трения.

Рассмотрим решение некоторых типичных задач.

Задача 1. Найти угол естественного откоса земляного грунта, если коэффициент трения для этого грунта $f = 0,8$. *Углом естественного откоса* называется тот наибольший угол наклона откоса к горизонту, при котором частица грунта, находящаяся на откосе, остается в равновесии.

Решение.

Рассмотрим равновесие частицы грунта (рис. 8.3). Запишем уравнения равновесия

$$\sum F_{kx} = 0: P \sin \alpha - F_{\text{тр}} = 0, \quad (8.1)$$

$$\sum F_{ky} = 0: N - P \cos \alpha = 0. \quad (8.2)$$

Так как

$$F_{\text{тр}} = fN, \quad (8.3)$$

то из (8.1) с учетом (8.3)

$$P \sin \alpha - fN = 0,$$

откуда

$$N = \frac{P \sin \alpha}{f},$$

из (8.2) $N = P \cos \alpha$. Следовательно, $\sin \alpha = f \cos \alpha$, или $\text{tg } \alpha = f$. Так как $\text{tg } \alpha = 0,8$, следовательно $\alpha = 38^\circ 40'$.

О т в е т: $\alpha = 38^\circ 40'$.

Задача 2. Пренебрегая трением между ползуном A и направляющей, а также трением во всех шарнирах и подшипниках кривошипного механизма, определить, какова должна быть сила P , необходимая для поддержания груза Q при указанном на рис. 8.4 положении механизма. Каковы минимальное и максимальное значения P , обеспечивающие неподвижность груза Q , если коэффициент трения между ползуном A и направляющей равен f .

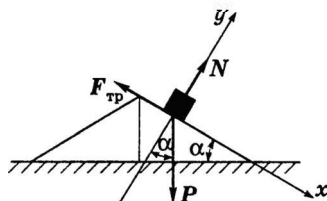


Рис. 8.3

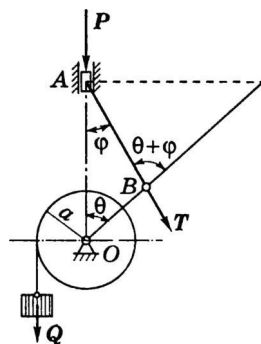


Рис. 8.4

Решение.

1. Обозначим через T силу, действующую со стороны шатуна AB на кривошип OB .

Можно записать

$$T = \frac{P}{\cos \varphi}.$$

Теперь составим уравнения моментов сил Q , T относительно точки O . Для $\sum M_O = 0$

$$Qa = rT \sin(\varphi + \theta), \quad r = OB,$$

$$Qa = r \frac{P}{\cos \varphi} \sin(\varphi + \theta),$$

$$P = \frac{Qa}{r} \frac{\cos \varphi}{\sin(\varphi + \theta)}.$$

2. Рассмотрим теперь звено AB (рис. 8.5).

Составим уравнения равновесия.

$$\sum X = 0: \quad N - T \sin \varphi = 0,$$

$$\sum Y = 0: \quad T \cos \varphi - F_{\text{тр}} - P = 0, \quad F_{\text{тр}} = fN.$$

Из первого уравнения $N = T \sin \varphi$.

Тогда $F_{\text{тр}} = fT \sin \varphi$.

Из второго уравнения

$$T \cos \varphi - fT \sin \varphi = P,$$

откуда

$$T = \frac{P}{\cos \varphi - f \sin \varphi}. \quad (8.4)$$

Далее рассмотрим кривошип OB . Составим уравнение моментов (рис. 8.6):

$$\sum M_O = 0: \quad Qa - rT \sin(\varphi + \theta) = 0,$$

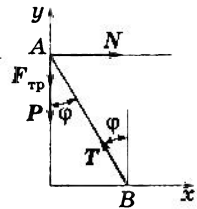


Рис. 8.5

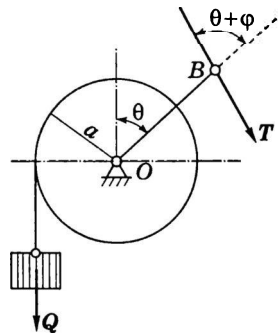


Рис. 8.6

вместо T подставим выражение (8.4):

$$Qa = \frac{rP \sin(\varphi + \theta)}{\cos \varphi - f \sin \varphi},$$

откуда

$$P = \frac{Qa}{r} \frac{\cos \varphi - f \sin \varphi}{\sin(\varphi + \theta)}.$$

3. Рассмотрим звено AB (рис. 8.7):

Составим уравнения равновесия.

$$\sum X = 0: N - T \sin \varphi = 0,$$

$$\sum Y = 0: T \cos \varphi + F_{\text{тр}} - P = 0,$$

$$F_{\text{тр}} = fN.$$

$$T = \frac{P}{\cos \varphi + f \sin \varphi}.$$

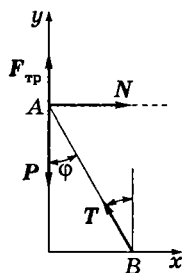


Рис. 8.7

Из уравнения моментов $\sum M_O = 0$

$$P = \frac{Qa}{r} \frac{\cos \varphi + f \sin \varphi}{\sin(\varphi + \theta)}.$$

Таким образом, нашли два значения силы P :

$$P_{\min} = \frac{Qa}{r} \frac{\cos \varphi - f \sin \varphi}{\sin(\varphi + \theta)}, \quad P_{\max} = \frac{Qa}{r} \frac{\cos \varphi + f \sin \varphi}{\sin(\varphi + \theta)}.$$

$$\text{О т в е т: } P_{\min} = \frac{Qa}{r} \frac{\cos \varphi - f \sin \varphi}{\sin(\varphi + \theta)}, \quad P_{\max} = \frac{Qa}{r} \frac{\cos \varphi + f \sin \varphi}{\sin(\varphi + \theta)}.$$

Трение нити о цилиндрическую

8.3. поверхность

К нити, накинутой на круглый цилиндрический вал (рис. 8.8), приложена сила P . Найдём, какую наименьшую силу Q надо приложить к другому концу нити, чтобы сохранить равновесие при $\angle AOB = \alpha$.

Рассмотрим равновесие элемента нити DE длиной $dl = R d\theta$, где R — радиус вала. Разность натяжений нити в точках D и E , равная dT , уравнивается силой трения $dF = f_0 dN$, где dN — нормальная реакция; f_0 — коэффициент трения.

Для предельного случая

$$dT = f_0 dN.$$

Величину dN найдем из уравнения равновесия в проекции на ось Oy :

$$dN = T \sin \frac{d\theta}{2} + (T + dT) \sin \frac{d\theta}{2} = T d\theta.$$

(Для малых углов можно считать, что $\sin \alpha = \alpha$.)

Подставив значение dN в предыдущее равенство, получим

$$dT = T f_0 d\theta.$$

Возьмем интегралы справа в пределах от 0 до α , а слева от Q до P (так как натяжение нити в точке, где $\theta = 0$, равно Q , а в точке, где $\theta = \alpha$, равно P). Получим

$$\int_Q^P \frac{dT}{T} = f_0 \int_0^\alpha d\theta \quad \text{или} \quad \ln \frac{P}{Q} = f_0 \alpha.$$

Отсюда $P/Q = e^{f_0 \alpha}$ или

$$Q = P e^{-f_0 \alpha}.$$

Сила Q зависит только от f_0 и угла α и не зависит от радиуса вала. При отсутствии трения ($f_0 = 0$) получаем $Q = P$. Увеличив угол α (навивая нить), можно значительно уменьшить величину Q , необходимую для уравнивания силы P . Например, натяжение в 1 т можно уравновесить силой всего в 2 кг, дважды обернув пеньковый канат вокруг деревянного столба.

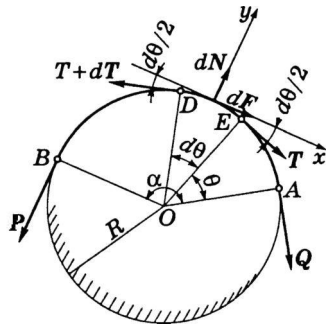


Рис. 8.8

Значения Q/P при $f_0 = 0,5$ (пеньковый канат по дереву) приведены в табл. 8.1.

Таблица 8.1
Таблица влияния трения

Число оборотов	α	$Q/P = e^{-f_0\alpha}$
$1/2$ оборота	π	0,208
1 оборот	2π	0,043
$1\frac{1}{2}$ оборота	3π	0,009
2 оборота	4π	0,002

Равновесие тела при наличии трения качения

8.4.

Трение качения называется сопротивление, возникающее при качении одного тела по поверхности другого. Рассмотрим круглый цилиндрический каток радиусом R и весом P , лежащий на шероховатой горизонтальной плоскости. Вследствие деформации тел их качение происходит не в точке A , а вдоль некоторой площадки AA' . Система сил, приложенная к катку в предельном случае, показана на рис. 8.9.

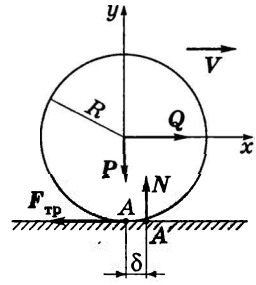


Рис. 8.9

Изображенная схема сил соответствует ведомому колесу.

Здесь Q — активная сила; P — сила тяжести; N — нормальная реакция, приложенная в точке A' ; $F_{\text{тр}}$ — сила трения; δ — длина площадки AA' , которая называется *коэффициентом трения качения*.

Составим уравнения равновесия

$$\begin{cases} \sum X = 0: Q - F_{\text{тр}} = 0 \Rightarrow Q = F_{\text{тр}}; \\ \sum Y = 0: N - P = 0 \Rightarrow N = P; \\ \sum M_A(F_k) = 0: N\delta - QR = 0 \Rightarrow N\delta = QR. \end{cases} \quad (8.5)$$

При отсутствии скольжения

$$F_{\text{тр}} \leq F_{\text{max}} = fN. \quad (8.6)$$

Для того чтобы каток не катился, должно выполняться условие

$$QR \leq M_{\text{max}} = P\delta. \quad (8.7)$$

С учетом (8.5) и (8.6), (8.7) имеем условия:

$Q \leq fN = fP$ (при отсутствии скольжения);

$Q \leq \frac{\delta}{R}P$ (при отсутствии качения).

Если $\frac{\delta}{R} < f$, то выполняется условие $Q \leq \frac{\delta}{R}P$ — каток в равновесии, при выполнении условия $\frac{\delta}{R}P \leq Q < fP$ — каток катится без скольжения (чистое качение). При $Q \geq fP$ — качение со скольжением.

Если $\frac{\delta}{R} > f$, то $Q \leq fP$ — каток в равновесии; при условии $fP \leq Q < \frac{\delta}{R}P$ — каток скользит не вращаясь (поступательное перемещение); когда $Q \geq \frac{\delta}{R}P$ — качение со скольжением.

Если $\frac{\delta}{R} = f$, $Q \leq \frac{\delta}{R}P = fP$ — каток в равновесии;

$Q \geq fP = \frac{\delta}{R}P$ — качение со скольжением.

Покажем области значений режимов качения и скольжения катка. Если обозначить K долю силы тяжести P , то можно определить зоны качения, качения со скольжением и равновесия.

На рис. 8.10, *a* показаны зоны равновесия 1, качения без скольжения 2, качения со скольжением 3, для которых выполняются условия:

$$Q < Q_2 = \frac{\delta}{R}P \text{ — каток в равновесии;}$$

$$Q_2 < Q < Q_1, \quad \frac{\delta}{R} P \leq Q < fP \quad \text{— качение без скольжения};$$

$$Q > Q_1, \quad Q \geq fP \quad \text{— качение со скольжением.}$$

На рис. 8.10, б показаны зоны равновесия 1, скольжения без качения 2, качения со скольжением 3, для которых выполняются условия:

$$Q \leq Q_1, \quad Q \leq fP \quad \text{— равновесие};$$

$$Q_1 < Q < Q_2, \quad fP \leq Q < \frac{\delta}{R} P \quad \text{— скольжение без качения};$$

$$Q > Q_2, \quad Q > \frac{\delta}{R} P \quad \text{— качение со скольжением.}$$

На рис. 8.10, в показаны зоны равновесия 1, качения со скольжением 2, для которых выполняются условия:

$$Q \leq fP \quad \text{— каток в равновесии};$$

$$Q \geq fP \quad \text{— качение со скольжением.}$$

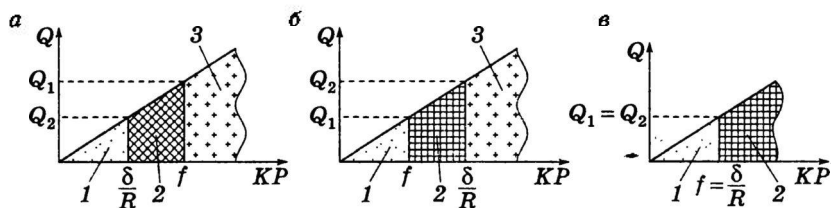


Рис. 8.10

Задача. На горизонтальной плоскости лежит шар радиусом R и весом Q (рис. 8.11). Коэффициент трения скольжения шара о плоскость f , коэффициент трения качения δ . При каких условиях горизонтальная сила P , приложенная в центре шара, сообщает ему равномерное качение?

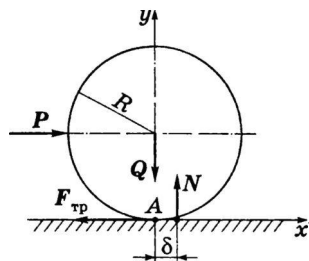


Рис. 8.11

Решение.

Составим уравнения равновесия катка:

$$\sum X = 0: \quad P - F_{\text{тр}} = 0; \quad (8.8)$$

$$\sum Y = 0: \quad N - Q = 0; \quad (8.9)$$

$$\sum M_{A_-} = 0: \quad -PR + N\delta = 0. \quad (8.10)$$

Для того чтобы каток не скользил, необходимо выполнить условие

$$F_{\text{тр}} < Nf.$$

Из (8.8) и (8.9)

$$P = F_{\text{тр}}, \quad N = Q.$$

Из (8.10)

$$P = N \frac{\delta}{R}, \quad \text{или} \quad P = Q \frac{\delta}{R}.$$

Подставив в неравенство

$$Q \frac{\delta}{R} < Qf,$$

найдем

$$f > \frac{\delta}{R}.$$

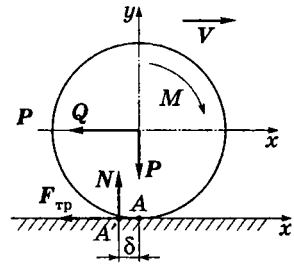


Рис. 8.12

В случае ведущего колеса схема приложенных сил показана на рис. 8.12.

Здесь Q — активная сила; P — вес; N — нормальная реакция; $F_{\text{тр}}$ — сила трения; M — активный (движущий) момент.

Исследование осуществляется, как в предыдущем случае.

О т в е т: $f > \frac{\delta}{R}$.

9

ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ

9.1. Центр параллельных сил

Даны параллельные силы P_1, P_2, \dots, P_n , приложенные в точках A_1, A_2, \dots, A_n . Предполагая существование равнодействующей, будем складывать силы последовательно. Например, сложим четыре силы (рис. 9.1).

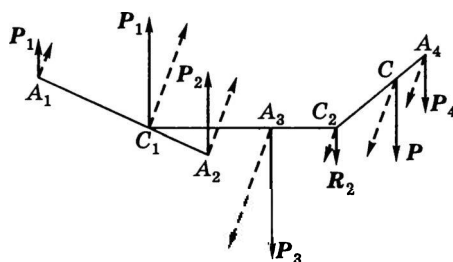


Рис. 9.1

Сложив P_1 и P_2 , найдем их равнодействующую R_1 , проходящую через точку C_1 . Сложив R_1 и P_3 , получим R_2 , проходящую через точку C_2 . Продолжив сложение, найдем равнодействующую R данной системы сил, проходящую через точку C .

Мысленно повернем все заданные силы вокруг точек их приложения на один и тот же угол так, чтобы они остались параллельны друг другу (на рис. 9.1 повернутые силы изображены штриховыми линиями).

Если повернутые силы складывать в прежнем порядке, то окажется, что равнодействующая первых двух из них пройдет через точку C_1 , равнодействующая первых трех пройдет через точку C_2 и т.д. Линия действия равнодействующей всех четырех сил пройдет через точку C . Модуль равнодействующей не изменится. Аналогичный результат получим и для n сил.

Точка C называется *центром параллельных сил*.

Центр параллельных сил обладает тем свойством, что если повернуть в одном направлении линии действия всех сил вокруг точек их приложений на один и тот же угол, то линия действия равнодействующей повернется вокруг центра параллельных сил на тот же угол.

Формулы координат центра тяжести

9.2. твердого тела

На все тела действует сила притяжения к Земле — сила тяжести. Сила тяжести приложена к каждой частице тела и направлена вертикально вниз.

Обозначим элементарные силы тяжести точек тела через $G_1, G_2, \dots, G_i, \dots, G_n$ (рис. 9.2). Их все можно считать параллельными с достаточной для практических целей степенью точности. Обозначим координаты точек приложения сил тяжести:

$$A_1(x_1, y_1, z_1), A_2(x_2, y_2, z_2), \dots, A_i(x_i, y_i, z_i), \dots, A_n(x_n, y_n, z_n).$$

Такая система сил всегда приводится к одной равнодействующей

$$G = \sum_{i=1}^n G_i,$$

называемой *силой тяжести тела*. Модуль этой силы называют *весом тела*. Точка C — центр параллельных сил тяжести — называется *центром тяжести тела*.

Координаты точки C x_C, y_C, z_C найдем с помощью теоремы Вариньона — теоремы о моменте равнодействующей относительно оси.

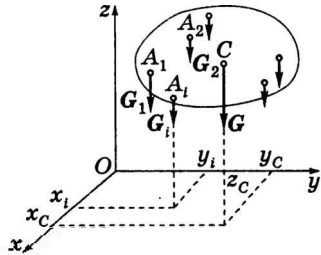


Рис. 9.2

Взяв моменты относительно оси Oy , имеем

$$Gx_C = G_1x_1 + G_2x_2 + \dots + G_ix_i + \dots + G_nx_n$$

или

$$Gx_C = \sum G_ix_i.$$

Отсюда

$$x_C = \frac{\sum G_ix_i}{G}. \quad (9.1)$$

Аналогично взяв моменты относительно оси Ox , получим

$$y_C = \frac{\sum G_iy_i}{G}. \quad (9.2)$$

Чтобы получить координату z_C , мысленно повернем все силы так, чтобы они были параллельны оси Oy , и возьмем моменты относительно оси Ox . Получим

$$z_C = \frac{\sum G_iz_i}{G}. \quad (9.3)$$

Формулы координат центра тяжести

9.3. объема, площади и линии

В случае однородного тела вес i -й части тела

$$G_i = \gamma V_i,$$

где γ — постоянная величина, равная отношению веса тела или его части к соответствующему объему (удельный вес); V_i — объем i -й части тела.

Подставив данное выражение в (9.1)–(9.3), получим формулы координат центра тяжести объема однородного тела:

$$x_C = \frac{\sum V_ix_i}{V}; \quad y_C = \frac{\sum V_iy_i}{V}; \quad z_C = \frac{\sum V_iz_i}{V},$$

где V — объем тела.

Под **центром тяжести** площади понимают центр тяжести однородной тонкой пластинки постоянной толщины (рис. 9.3):

$$G_i = \gamma F_i,$$

где γ — вес единицы площади; F_i — площадь i -го элемента пластины.

Аналогично получим формулы координат центра тяжести площади:

$$x_C = \frac{\sum F_i x_i}{F}; \quad y_C = \frac{\sum F_i y_i}{F},$$

где F — площадь фигуры ($F = \sum F_i$).

Выражения, стоящие в числителях, называются **статическими моментами площади фигуры** относительно осей координат:

$\sum F_i x_i = S_y$ — статический момент площади относительно оси Oy ;

$\sum F_i y_i = S_x$ — статический момент площади относительно оси Ox .

Следовательно,

$$x_C = \frac{S_y}{F}; \quad y_C = \frac{S_x}{F}.$$

Произведения $F_i x_i$ и $F_i y_i$ измеряются в кубических единицах длины (см^3 , мм^3 и т.д.).

Центром тяжести линии называется центр тяжести однородной весьма тонкой проволоки постоянной толщины (рис. 9.4).

Выражения для координат центра тяжести:

$$x_C = \frac{\sum L_i x_i}{L}; \quad y_C = \frac{\sum L_i y_i}{L}; \quad z_C = \frac{\sum L_i z_i}{L},$$

где L_i — длина элемента линии; L — длина линии ($L = \sum L_i$).

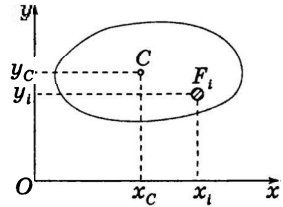


Рис. 9.3

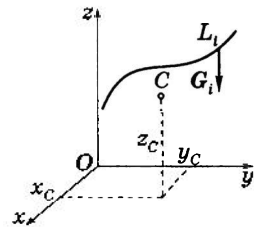


Рис. 9.4

Для определения координат центров тяжести тел произвольной формы применим интегральный подход.

Рассмотрим тело произвольной формы, находящееся в поле силы тяжести. Данное тело разобьем сечениями, параллельными координатным плоскостям, на элементарные объемы.

Обозначим через ΔV_k объем элементарного параллелепипеда с центром в точке M_k , ΔP_k — силу тяжести, действующую на этот элемент (рис. 9.5). Тогда $\gamma(x_k, y_k, z_k) = \lim_{\Delta V_k \rightarrow 0} \frac{\Delta P_k}{\Delta V_k}$ — удельный вес в данной точке.

$$\Delta P_k = \gamma_k \Delta V_k,$$

где $\Delta V_k = dx_k dy_k dz_k$.

Для системы n параллельных сил тяжести положение некоторой точки C_n

$$r_n = \frac{r_1 \Delta P_1 + r_2 \Delta P_2 + \dots + r_n \Delta P_n}{\Delta P_1 + \Delta P_2 + \dots + \Delta P_n}.$$

Центром тяжести называется точка, являющаяся предельной для C_n при $n \rightarrow \infty$, т.е.

$$r_C = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n r_k \gamma_k \Delta V_k}{\sum_{k=1}^n \gamma_k \Delta V_k} = \frac{1}{P} \iiint_V \gamma(x, y, z) r dx dy dz,$$

где $\Delta V = dx dy dz$.

$$P = \Sigma \Delta P_i.$$

Координаты центра тяжести для неоднородного тела:

$$x_C = \frac{1}{P} \iiint_V \gamma(x, y, z) x dx dy dz;$$

$$y_C = \frac{1}{P} \iiint_V \gamma(x, y, z) y dx dy dz;$$

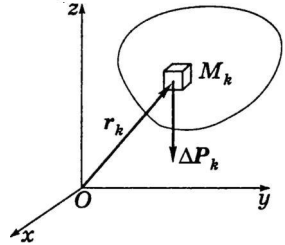


Рис. 9.5

$$z_C = \frac{1}{P} \iiint_V \gamma(x, y, z) z dx dy dz.$$

Для однородных тел $\gamma(x, y, z) = \gamma = \text{const}$:

$$x_C = \frac{\gamma}{P} \iiint_V x dx dy dz;$$

$$y_C = \frac{\gamma}{P} \iiint_V y dx dy dz;$$

$$z_C = \frac{\gamma}{P} \iiint_V z dx dy dz.$$

Так как $P = \gamma V$, то координаты центра тяжести для однородных тел

$$x_C = \frac{1}{V} \iiint_V x dx dy dz;$$

$$y_C = \frac{1}{V} \iiint_V y dx dy dz;$$

$$z_C = \frac{1}{V} \iiint_V z dx dy dz.$$

Для тонких оболочек (пластинок)

$$x_C = \frac{1}{S} \iint_S x dS;$$

$$y_C = \frac{1}{S} \iint_S y dS;$$

$$z_C = \frac{1}{S} \iint_S z dS.$$

Для криволинейных стержней

$$x_C = \frac{1}{L} \int_L x dl;$$

$$y_C = \frac{1}{L} \int_L y dl;$$

$$z_C = \frac{1}{L} \int_L z dl.$$

Методы определения центра тяжести 9.4. некоторых фигур

Если однородное тело имеет плоскость симметрии, ось симметрии или центр симметрии, то центр тяжести тела находится соответственно в плоскости симметрии, на оси симметрии или в центре симметрии.

Центр тяжести C площади параллелограмма (рис. 9.6) совпадает с точкой пересечения его диагоналей.

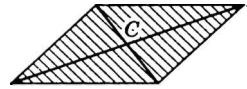


Рис. 9.6

Центр тяжести C площади треугольника (рис. 9.7) совпадает с точкой пересечения его медиан. Отсюда следует, что центр тяжести площади треугольника отстоит от каждой стороны на расстоянии, равном одной трети высоты, опущенной на эту сторону.

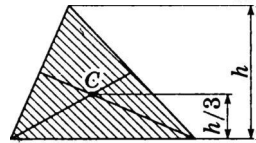


Рис. 9.7

Центр тяжести C дуги окружности (рис. 9.8) находится на оси симметрии на расстоянии

$$OC = R \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}},$$

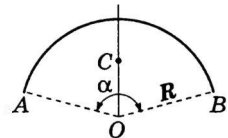


Рис. 9.8

где R — радиус окружности; α — центральный угол, рад.
В случае полуокружности ($\alpha = \pi$)

$$OC = \frac{2R}{\pi} = 0,637R.$$

Центр тяжести C площади сектора (рис. 9.9) находится на оси симметрии на расстоянии

$$OC = \frac{2}{3} R \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}}.$$

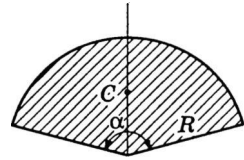


Рис. 9.9

В случае полукруга ($\alpha = \pi$)

$$OC = \frac{4R}{3\pi} = 0,425R.$$

Центр тяжести C объема пирамиды (рис. 9.10) находится на прямой C_0A , соединяющей вершину A пирамиды с центром тяжести C_0 основания:

$$C_0C = \frac{1}{4} C_0A.$$

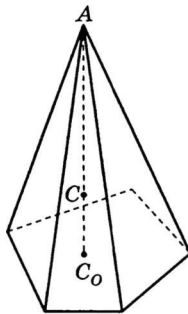


Рис. 9.10

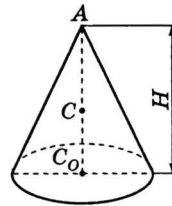


Рис. 9.11

Центр тяжести C объема конуса находится на оси симметрии на расстоянии от центра основания

$$C_0C = \frac{1}{4} H,$$

где H — высота конуса (рис. 9.11).

Задача. Найти координаты центра тяжести поперечного сечения неравнобокого уголка, полки которого имеют ширину $OA = a$ и толщину $OB = b$ (рис. 9.12).

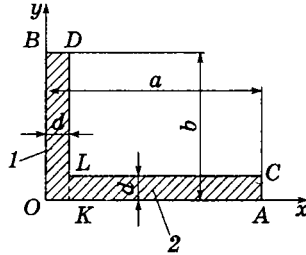


Рис. 9.12

Решение.

Представим уголок состоящим из прямоугольника $OBDK$ — тело 1 и прямоугольника $LKAC$ — тело 2. Тогда координаты центра тяжести уголка

$$\begin{aligned}x_C &= \frac{S_1 x_1 + S_2 x_2}{S_1 + S_2}; \\y_C &= \frac{S_1 y_1 + S_2 y_2}{S_1 + S_2},\end{aligned}\tag{9.4}$$

где S_1 — площадь прямоугольника $OBDK$; S_2 — площадь прямоугольника $LKAC$; (x_1, y_1) , (x_2, y_2) — координаты центров тяжести 1-го и 2-го тела соответственно.

Согласно рисунку

$$S_1 = db, \quad x_1 = \frac{d}{2}, \quad y_1 = \frac{b}{2};\tag{9.5}$$

$$S_2 = (a-d)d, \quad x_2 = d + \frac{a-d}{2} = \frac{a+d}{2}, \quad y_2 = \frac{d}{2}.\tag{9.6}$$

Подставляя (9.5), (9.6) в (9.4), находим

$$x_C = \frac{db \frac{d}{2} + (a-d)d \frac{a+d}{2}}{ab + (a-d)d} = \frac{a^2 + bd - d^2}{2(a+b-d)},$$

$$y_C = \frac{db \frac{b}{2} + (a-d)d \frac{d}{2}}{db + (a-d)d} = \frac{b^2 + ad - d^2}{2(a+b-d)}.$$

$$\text{О т в е т: } x_C = \frac{a^2 + bd - d^2}{2(a+b-d)}, y_C = \frac{b^2 + ad - d^2}{2(a+b-d)}.$$

10

ГЕОМЕТРИЯ МАСС В СИСТЕМАХ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК И ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

Центр масс (центр инерции) системы

10.1. материальных точек и твердого тела

Полагая в (9.1)–(9.3) $G_i = m_i g$, где m_i — масса i -й частицы; g — ускорение свободного падения, получим координаты центра масс системы материальных точек:

$$x_C = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i M}, \quad y_C = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i M}, \quad z_C = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i M}, \quad M = \sum m_i. \quad (10.1)$$

Соответственно для сплошного твердого тела

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{1}{M} \iiint_V \gamma(x, y, z) x dx dy dz, \\ y_C &= \frac{1}{M_C} \iiint_V \gamma(x, y, z) y dx dy dz, \\ z_C &= \frac{1}{M} \iiint_V \gamma(x, y, z) z dx dy dz, \end{aligned} \quad (10.2)$$

где $\gamma(x, y, z)$ — плотность, причем для однородного тела $\gamma(x, y, z) = \text{const}$.

Из формул (10.1) и (10.2) для центра масс системы следует зависимость координат от масс точек и их координат. Если массы точек и/или их координаты не даны, но известны координаты центра масс, то можно получить информацию о том, в окрестности какой точки группируются массы системы.

Однако эта характеристика системы является достаточно грубой.

Если твердое тело имеет по объему переменную плотность, то информация о центре масс позволяет определить, в окрестности какой точки плотность тела максимальна.

При поступательном движении системы (тела) динамика системы (тела) определяется теоремой о движении центра масс. В этом случае инерционные свойства системы (тела) проявляются в сопротивлении изменению состояния и полностью определяются массой системы (тела) — скалярной величиной. Вследствие этого центр масс называют также *центром инерции*.

В случае если движение системы (тела) не является поступательным, т.е. возможны вращательные движения, то будет возникать сопротивление (инерция) этим формам движения, которое в принципе также зависит и от массы, и от геометрии тела.

Необходимо ввести характеристики, которые давали бы информацию о системе (теле), дополняющую информацию о геометрическом центре масс. Действительно, в формулах для координат центра инерции величины масс и координат точек находятся под знаком суммы (интеграла), вследствие чего для одного и того же значения центра масс можно построить бесконечное множество возможных распределений масс (конфигураций) в системе (плотности в теле), изменяя величины масс и/или координат.

Очевидно, что следующая информационная характеристика, которая будет дополнять информацию о координатах центра масс, должна содержать сведения о разбросе точечных масс от центра масс, а также о неравномерности распределения масс в системе (плотность тела). Такая характеристика уже не будет ни скалярной, ни векторной. Она будет являться тензором. Из алгебры известно, что математическими объектами более сложной структуры, чем векторы, являются матрицы, для трехмерного случая имеющие третий порядок. Покажем, что информация об инерционных свойствах пространственной системы материальных точек (твердого тела) представляется в виде матрицы, которая называется *тензором инерции*.

Моменты инерции, 10.2. центробежные моменты

Введем величину, характеризующую величину разброса точек относительно точки O (рис. 10.1):

$$J_o = \sum_{k=1}^n m_k r_k^2, \quad (10.3)$$

где n — число точек системы.

Для сплошного тела

$$J_o = \int r^2 dm = \int \gamma(r) r^2 dV. \quad (10.4)$$

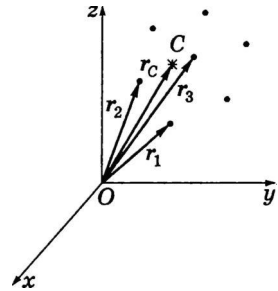


Рис. 10.1

Из (10.3)–(10.4) следует, что J_o зависит не только от величины разброса, но и от распределения массы по объему, занимаемому телом.

Моменты инерции относительно координатных осей x , y , z имеют вид

$$J_x = \sum_{k=1}^n m_k (y_k^2 + z_k^2),$$

$$J_y = \sum_{k=1}^n m_k (z_k^2 + x_k^2),$$

$$J_z = \sum_{k=1}^n m_k (x_k^2 + y_k^2).$$

Если точка O — центр координат, то

$$2J_o = J_x + J_y + J_z.$$

Это соотношение выполняется для любой другой системы координат x_1, y_1, z_1 с началом в точке O , откуда следует, что $2J_o = J_x + J_y + J_z$ является инвариантом.

Для твердого тела

$$J_x = \int (y^2 + z^2) \rho dV,$$

$$J_y = \int (x^2 + z^2) \rho dV,$$

$$J_z' = \int (x^2 + y^2) \rho dV,$$

$$J_o = \int (x^2 + y^2 + z^2) \rho dV.$$

Неравномерность распределения масс характеризуется центробежными моментами

$$J_{xy} = \sum_{k=1}^n m_k x_k y_k,$$

$$J_{yz} = \sum_{k=1}^n m_k y_k z_k,$$

$$J_{zx} = \sum_{k=1}^n m_k z_k x_k.$$

Тензор инерции. Моменты инерции и центробежные моменты являются компонентами тензора инерции

$$J = \begin{pmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{pmatrix}. \quad (10.5)$$

Как уже было отмечено, компоненты тензора содержат информацию об инерционных свойствах тела (системы) при вращательных движениях.

Рассмотрим ось u , проходящую через начало системы координат $Oxyz$ (рис. 10.2). Косинусы углов, образуемых осью u с осями Ox , Oy , Oz , обозначим соответственно α , β , γ .

Тогда

$$J_u = \sum_{k=1}^n m_k \rho_k^2 = \sum_{k=1}^n m_k [(x_k^2 + y_k^2 + z_k^2) - (x_k \alpha + y_k \beta + z_k \gamma)^2] =$$

$$= \sum_{k=1}^n m_k [(1 - \alpha^2) x_k^2 + (1 - \beta^2) y_k^2 + (1 - \gamma^2) z_k^2 -$$

$$- 2\alpha\beta x_k y_k - 2\alpha\gamma x_k z_k - 2\beta\gamma y_k z_k].$$

На основании тождества $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ заменяем $1 - \alpha^2$, $1 - \beta^2$, $1 - \gamma^2$ соответственно на $\beta^2 + \gamma^2$, $\alpha^2 + \gamma^2$, $\alpha^2 + \beta^2$ и приводим по-

добные члены в выражении, стоящем в квадратных скобках. Получаем

$$J_u = J_x \alpha^2 + J_y \beta^2 + J_z \gamma^2 - 2J_{xy} \alpha \beta - 2J_{xz} \alpha \gamma - 2J_{yz} \beta \gamma. \quad (10.6)$$

Эллипсоид инерции. Главные оси инерции. Формула (10.6) допускает наглядную геометрическую интерпретацию (рис. 10.2). На оси u отложим по обе стороны от точки O отрезки такой длины ON , что

$$ON = ON = \frac{1}{\sqrt{J_u}},$$

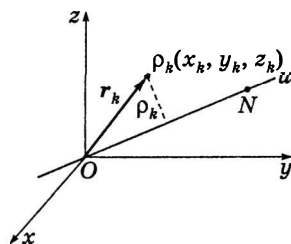


Рис. 10.2

и найдем геометрическое место точек $N(x, y, z)$:

$$\alpha = \sqrt{J_u} x, \quad \beta = \sqrt{J_u} y, \quad \gamma = \sqrt{J_u} z.$$

Подставив эти значения в (10.6), получим уравнение поверхности второго порядка — эллипсоида:

$$J_x x^2 + J_y y^2 + J_z z^2 - 2J_{xy} xy - 2J_{xz} xz - 2J_{yz} yz = 1. \quad (10.7)$$

Действительно, отрезок ON имеет конечную длину, так как $J_u \geq \delta > 0$. Исключение составляет предельный случай, когда все точки P_k ($k = 1, 2, \dots, n$) лежат на одной прямой (например, в случае бесконечно тонкого стержня). Тогда момент инерции $J_u = 0$ и эллипсоид инерции превращается в цилиндр.

Эллипсоид, описываемый уравнением (10.7), называется *эллипсоидом инерции* системы материальных точек для точки O . При повороте системы координат $Oxyz$ уравнение эллипсоида инерции изменяется. Главные оси эллипсоида инерции называются *главными осями инерции* системы для точки O . В системе координат $Ox_*y_*z_*$, оси которой направлены по главным осям эллипсоида инерции, уравнение (10.7) имеет вид

$$Ax_*^2 + By_*^2 + Cz_*^2 = 1. \quad (10.8)$$

В этой системе координат центробежные моменты инерции

$$J_{x_*y_*} = J_{x_*z_*} = J_{y_*z_*} = 0.$$

Величины A, B, C в (10.8) — моменты инерции относительно главных осей Ox_* , Oy_* , Oz_* соответственно. Они называются *главными моментами инерции* системы для точки O . Если точка O совпадает с центром масс, то оси Ox_* , Oy_* , Oz_* называются *главными центральными осями инерции*, а величины A, B, C — *главными центральными моментами инерции*.

Из аналитической геометрии известно, что для любого эллипсоида существуют главные оси. Величины A, B, C являются собственными значениями матрицы (10.5). Если они различны, то главные оси определяются однозначно. Если эллипсоид инерции для точки O является эллипсоидом вращения вокруг оси Oz_* , то за его главные оси можно принять ось Oz_* и любые две ортогональные оси, лежащие в экваториальной плоскости эллипсоида. Если $A = B = C$, то все оси, проходящие через точку O , являются для нее главными.

Если эллипсоид инерции для точки O построен, то момент инерции относительно какой-либо оси u равен $1/ON^2$, где ON — отрезок, соединяющий точку O с точкой пересечения оси u с эллипсоидом. Наибольшую величину имеет момент инерции относительно наименьшей оси эллипсоида, а наименьшую — относительно наибольшей его оси.

Замечание. Пусть в системе координат $Oxyz$ не все три центробежных момента инерции равны нулю, например, $J_{xz} = J_{yz} = 0$, а $J_{xy} \neq 0$. Тогда ось Oz будет главной.

Свойства главных моментов инерции. Не всякий эллипсоид является эллипсоидом инерции некоторой системы. Действительно, если за оси Ox_* , Oy_* , Oz_* приняты главные оси инерции для точки O , то уравнение эллипсоида инерции имеет вид (10.8), где

$$A = \sum_{k=1}^n m_k (y_{*k}^2 + z_{*k}^2),$$

$$B = \sum_{k=1}^n m_k (y_{*k}^2 + x_{*k}^2),$$

$$C = \sum_{k=1}^n m_k (x_{*k}^2 + y_{*k}^2).$$

Главные моменты инерции удовлетворяют неравенствам треугольника:

$$A + B \geq C, \quad A + C \geq B, \quad B + C \geq A. \quad (10.9)$$

Проверим первое из этих неравенств:

$$\begin{aligned} A + B &= \sum_{k=1}^n m_k (x_{*k}^2 + y_{*k}^2 + 2z_{*k}^2) = \\ &= \sum_{k=1}^n m_k z (x_{*k}^2 + y_{*k}^2) + 2 \sum_{k=1}^n m_k z_{*k}^2 = C + 2 \sum_{k=1}^n m_k z_{*k}^2 \geq C, \end{aligned}$$

причем знак равенства возможен только тогда, когда все точки системы лежат в плоскости Ox_*y_* , т.е. когда $z_{*k} = 0$ для всех k . Второе и третье неравенства проверяются аналогично.

Для графического представления области допустимых значений моментов инерции введем обозначения $\theta_A = A/B$, $\theta_C = C/B$. Неравенства (10.9) запишутся в виде

$$\theta_A + 1 \geq \theta_C, \quad \theta_A + \theta_C \geq 1, \quad 1 + \theta_C \geq \theta_A.$$

Область допустимых значений параметров показана на рис. 10.3 штриховкой. Она представляет собой бесконечную полосу, лежащую между параллельными прямыми $\theta_A + 1 = \theta_C$ и $1 + \theta_C = \theta_A$ и расположенную правее и выше прямой $\theta_A + \theta_C = 1$. Участки границы области допустимых значений параметров $\theta_A + 1 = \theta_C$, $\theta_A + \theta_C = 1$ и $1 + \theta_C = \theta_A$ отвечают системам материальных точек, лежащих соответственно в плоскостях Ox_*y_* , Ox_*z_* и Ox_*z_* . Точка (1, 0) на рис. 10.3, точка (0, 1) и бесконечно удаленные точки прямых $\theta_A + 1 = \theta_C$, $1 + \theta_C = \theta_A$ отвечают системам материальных точек, лежащих соответственно на осях Oz_* , Ox_* и Oy_* .

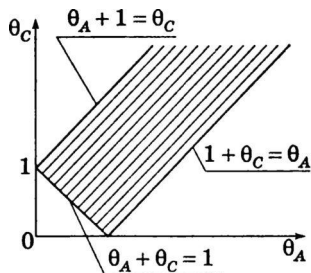


Рис. 10.3

Раздел



ГЕОМЕТРИЯ ДВИЖЕНИЙ — КИНЕМАТИКА

-
-
11. Кинематика точки
 12. Кинематика абсолютно твердого тела
 13. Движение твердого тела вокруг неподвижной точки и движение свободного твердого тела
 14. Сложное движение точки
 15. Сложное движение твердого тела

11

КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

11.1. Основные понятия

Движения всех тел происходят в пространстве и во времени. Слово «кинематика» происходит от греческого слова «кинема», что означает движение.

Кинематика изучает движение тел вне зависимости от сил, определяющих движение, т.е. не рассматривает силы, действующие на тело, и массу тела.

С телом, относительно которого рассматривается движение, связывают систему координат, которую называют *системой отсчета*. Переменные величины в кинематике рассматривают как функции времени.

Рассмотрим основные понятия, связанные с движением точки.

Пусть точка M движется относительно некоторой системы отсчета, описывая некоторую линию. Эта линия называется *траекторией движения* точки. Если траектория точки прямая линия, то движение точки называют *прямолинейным*. Если траектория точки кривая линия (необязательно плоская), то движение точки называется *криволинейным*.

Задача кинематики формулируется так: найти способы задания движения и исходя из них определить скорости и ускорения.

11.2. Способы задания движения

Движение точки M по отношению к выбранной системе отсчета считается заданным, если известен способ, при помощи которого можно определить положение точки M в любой момент времени. Существует три способа задания движения.

Векторный способ. Рассмотрим вектор r , соединяющий какую-нибудь неподвижную точку O с точкой M (точка O может быть началом системы координат) (рис. 11.1). Знать движение точки M , значит знать, как изменяется радиус-вектор r с течением времени, т.е. знать r как некоторую вектор-функцию времени t . Следовательно, $r = r(t)$ — закон движения.

Координатный способ. Выразим r через единичные векторы и координаты (x, y, z) точки M (рис. 11.2):

$$r = ix + jy + kz.$$

Чтобы знать, как r изменяется с течением времени, надо знать, как изменяются с течением времени координаты (x, y, z) точки M , т.е. x, y, z должны быть заданы как функции времени:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \quad (11.1)$$

Данные формулы представляют *уравнения движения точки* при координатном способе задания движения. Уравнения (11.1) можно рассматривать как параметрические уравнения траектории, где параметром является время t . Чтобы получить уравнения траектории в обычной координатной форме, достаточно исключить t из уравнений движения точки.

Если движение точки задано в цилиндрических координатах (рис. 11.3), то уравнения движения имеют вид

$$\varphi = \varphi(t), \quad \rho = \rho(t), \quad z = z(t),$$

где $-\pi < \varphi \leq \pi$; $0 \leq \rho < \infty$; $-\infty < z < \infty$.

В сферических координатах (рис. 11.4) уравнения движения запишутся как

$$\varphi = \varphi(t), \quad \theta = \theta(t), \quad r = r(t),$$

$$-\pi < \varphi \leq \pi; \quad 0 \leq \theta < \pi; \quad 0 < r < \infty.$$

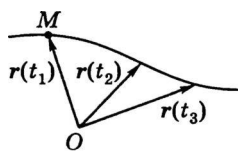


Рис. 11.1

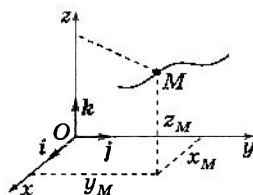


Рис. 11.2

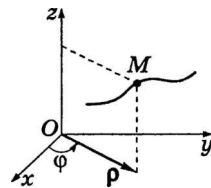


Рис. 11.3

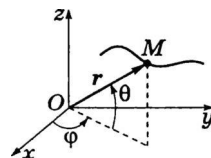


Рис. 11.4

Выражения, связывающие цилиндрические и сферические координаты с декартовыми, имеют вид

$$x = r \cos \theta \cos \varphi,$$

$$y = r \cos \theta \sin \varphi,$$

$$z = r \sin \theta.$$

В случае полярных координат (рис. 11.5) $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$.

Прямоугольные координаты связаны с полярными соотношениями

$$x = r \cos \varphi; \quad y = r \sin \varphi; \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

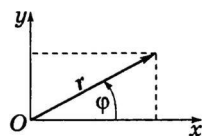


Рис. 11.5

Естественный способ. На траектории движения точки M зададим начало отсчета (точка O) и укажем положительное и отрицательное направления (рис. 11.6).

Дуговой координатой σ точки M назовем алгебраическую величину, равную $\pm \overset{\frown}{OM}$, т.е.

$$\sigma = \pm \overset{\frown}{OM},$$

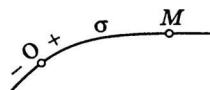


Рис. 11.6

которая может принимать положительные и отрицательные значения в соответствии с направлениями на траектории.

Движение точки считают заданным, если известны траектория движения и дуговая координата $\sigma = \sigma(t)$ — закон движения.

Не следует отождествлять дуговую координату σ и пройденный путь s : σ зависит от выбора направления на траектории и начальной точки O ; s от выбора начальной точки и направлений на траектории не зависит, всегда неотрицателен и возрастает с изменением времени t . В частных случаях, когда $\sigma > 0$ отсчитывается от начального положения и только возрастает, σ и s совпадают.

Если движение происходит в сторону возрастания дуги σ , то дифференциал дуги $d\sigma = \dot{\sigma}(t)dt$ будет положительным, если же движение происходит в сторону убывания дуги, то дифференциал дуги будет отрицательным.

Связь между способами задания движения. Так как проекции радиуса-вектора r на оси координат x , y , z равны координатам точки M (рис. 11.7), то

$$r = xi + yj + zk, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Направление r задается направляющими косинусами

$$\cos(i, r) = \frac{x}{r}, \quad \cos(j, r) = \frac{y}{r}, \quad \cos(k, r) = \frac{z}{r},$$

где $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.

Вышеприведенные формулы выражают взаимосвязь между координатным и векторным способами задания движения.

Установим связь между координатным и естественным способами.

Пусть задано движение в виде (11.1).

Найдем закон $\sigma = \sigma(t)$ (рис. 11.8). Дифференциал дуги M_0M

$$d\sigma = \pm\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2},$$

где $dx = \dot{x}dt$, $dy = \dot{y}dt$, $dz = \dot{z}dt$, тогда

$$d\sigma = \pm\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}dt,$$

$$\sigma = \pm \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt.$$

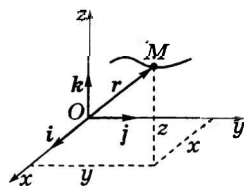


Рис. 11.7

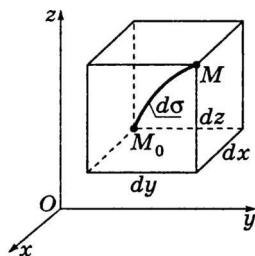


Рис. 11.8

Здесь и далее точкой наверху обозначается производная по времени.

Знак «+» берется, если движение точки начинается в сторону выбранного положительного отсчета дуги. Знак «-» — если движение точки начинается в противоположном направлении.

Задача. По заданным уравнениям движения точки $x = 3t - 5$, $y = 4 - 2t$ найти уравнения ее траектории в координатной форме, т.е. в зависимости y от x ($y = y(x)$) указать точку, из которой начинается движение.

Решение.

Исключим время из данных уравнений. Получим $2x + 3y - 2 = 0$ — уравнение траектории.

Подставим в данные уравнения вместо t нуль:

$x|_{t=0} = -5, y|_{t=0} = 4$ — координаты точки, из которой начинается движение (рис. 11.9).

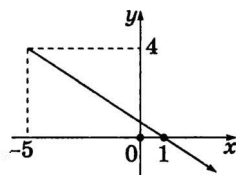


Рис. 11.9

О т в е т: $y = \frac{2}{3}(1 - x), x_0 = -5, y_0 = 4$.

Производная вектор-функции

11.3. по скалярному аргументу

Пусть есть некоторая непрерывная вектор-функция $a = a(u)$ скалярного аргумента u . Обозначим приращение аргумента u через Δu . Тогда соответствующее приращение вектор-функции

$$\Delta a = a(u + \Delta u) - a(u).$$

Предел отношения (рис. 11.10)

$$\frac{\Delta a}{\Delta u} = \frac{a(u + \Delta u) - a(u)}{\Delta u}.$$

Если предел данного соотношения при $\Delta u \rightarrow 0$ существует, то, он называется *производной вектор-функции «a» по скалярному аргументу «u»*

и обозначается $\frac{da}{du}$, т.е.

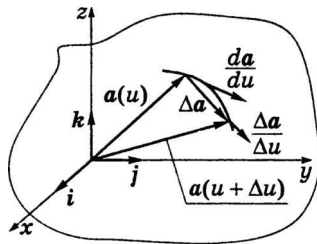


Рис. 11.10

$$\frac{da}{du} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{a(u + \Delta u) - a(u)}{\Delta u}.$$

Производная вектор-функции по скалярному аргументу всегда направлена по касательной к годографу этого вектора.

Если вектор $a(u)$ задан в виде

$$a(u) = a_x(u)\mathbf{i} + a_y(u)\mathbf{j} + a_z(u)\mathbf{k},$$

то

$$\frac{da}{du} = \frac{da_x}{du}\mathbf{i} + \frac{da_y}{du}\mathbf{j} + \frac{da_z}{du}\mathbf{k},$$

где $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ — орты неподвижных координатных осей.

Модуль производной вектора по скалярному аргументу u

$$\left| \frac{da}{du} \right| = \sqrt{\left(\frac{da_x}{du} \right)^2 + \left(\frac{da_y}{du} \right)^2 + \left(\frac{da_z}{du} \right)^2}.$$

Если модуль вектора $a(u)$ остается постоянным при изменении аргумента u , то годографом вектора a будет кривая, расположенная на сфере радиусом a . Следовательно, производная $\frac{da}{du}$, направленная по касательной к годографу вектора a , будет перпендикулярна вектору a .

Скорость точки при векторном, координатном, естественном способах

11.4. задания движения

Скорость точки при векторном способе задания движения. Рассмотрим движение некоторой точки M относительно системы координат $Axyz$.

Пусть $r(t)$ определяет положение точки M_0 в момент времени t (рис. 11.11), а вектор $r(t + \Delta t)$ — положение точки M_1 в момент времени $(t + \Delta t)$.

Средняя скорость точки M_1 за промежуток времени Δt

$$V_{\text{cp}} = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{r(t + \Delta t) - r(t)}{\Delta t}.$$

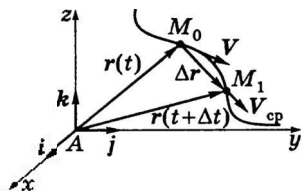


Рис. 11.11

Скорость точки в данный момент времени, или мгновенная скорость,

$$V = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{dr}{dt} = \dot{r}.$$

Таким образом, скорость есть первая производная от радиуса-вектора $r(t)$.

Скорость точки при координатном способе задания движения. Проекции скорости на оси координат равны производным по времени от соответствующих координат точки. В случае движения точки M в пространстве проекции ее скорости V на оси координат

$$\dot{x} = V_x = \frac{dx}{dt}; \quad \dot{y} = V_y = \frac{dy}{dt}; \quad \dot{z} = V_z = \frac{dz}{dt}.$$

Вектор скорости

$$V = \dot{x}i + \dot{y}j + \dot{z}k.$$

Численное значение скорости

$$V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}.$$

Направляющие косинусы:

$$\cos \alpha = \frac{V_x}{V}; \quad \alpha \text{ — угол между осью } x \text{ и } V;$$

$$\cos \beta = \frac{V_y}{V}; \quad \beta \text{ — угол между осью } y \text{ и } V;$$

$$\cos \gamma = \frac{V_z}{V}; \quad \gamma \text{ — угол между осью } z \text{ и } V.$$

На рис. 11.12 изображены проекции скорости точки M при движении по плоскости. Численное значение скорости

$$V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}.$$

Скорость точки при естественном способе задания движения. Пусть условия

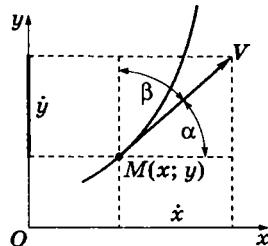


Рис. 11.12

естественного способа задания движения выполнены: $\sigma = \sigma(t)$.
Можно записать

$$\begin{aligned} V &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta \sigma} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} \frac{\Delta \sigma}{\Delta \sigma} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta r}{\Delta \sigma} \frac{\Delta \sigma}{\Delta t} \right] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta \sigma} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \sigma}{\Delta t} = \\ &= \tau \frac{d\sigma}{dt} = V_\tau \tau, \end{aligned}$$

так как $\frac{\Delta r}{\Delta \sigma} = \tau$, где τ — орт касательной к кривой, направленный в сторону положительного (рис. 11.13, а) или отрицательного (рис. 11.13, б) отсчета дуги.

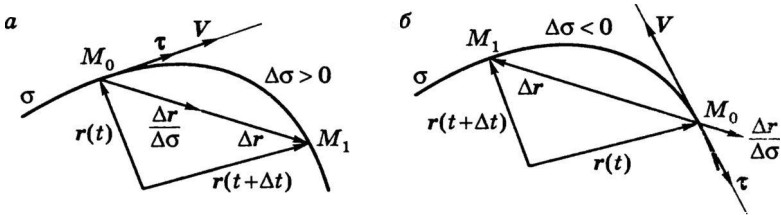


Рис. 11.13

$V = V_\tau \tau$, где V_τ — проекция V на ось τ . Так как проходимый точкой путь всегда положительный, то элемент пути $ds = |d\sigma|$.
Следовательно,

$$V = \left| \frac{d\sigma}{dt} \right| = \frac{ds}{dt}.$$

Если $\Delta\sigma > 0$, то $V = V_\tau$; если $\Delta\sigma < 0$, то $V = -V_\tau$.

Ускорение точки при векторном, координатном, естественном способах 11.5 задания движения

Ускорение точки при векторном способе задания движения. Производная функции характеризует быстроту изменения функции при данном значении аргумента. Чтобы охарактере-

ризовать быстроту изменения скорости в рассматриваемый момент, необходимо найти производную скорости. Эта производная называется **ускорением**.

Рассмотрим приращение вектора скорости V за промежуток времени Δt (рис. 11.14):

$$\Delta V = V_2 - V_1 = V(t + \Delta t) - V(t).$$

Среднее ускорение точки за промежуток времени Δt

$$W_{\text{cp}} = \frac{\Delta V}{\Delta t}.$$

Ускорение точки в данный момент

$$W = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2 r}{dt^2}.$$

Годографом скорости будет кривая, которую описывает конец вектора скорости при движении точки, если вектор скорости проводится из одной и той же точки (рис. 11.15).

Очевидно, что скорость точки, вычерчивающей годограф скорости, равна ускорению точки при ее движении по траектории ($W = \dot{V}$).

Ускорение при координатном способе задания движения. Пусть движение точки задано в прямоугольной системе координат $Oxyz$.

Уравнения движения точки:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

Скорость

$$V = V_x i + V_y j + V_z k.$$

Продифференцировав данное выражение, получим ускорение

$$W = \frac{dV}{dt} = \frac{dV_x}{dt} i + \frac{dV_y}{dt} j + \frac{dV_z}{dt} k = \ddot{x}i + \ddot{y}j + \ddot{z}k.$$

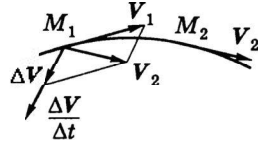


Рис. 11.14

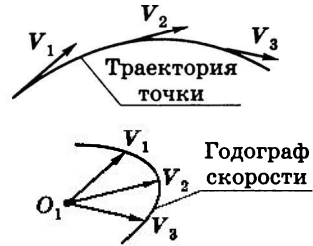


Рис. 11.15

Проекции ускорения на оси x , y , z :

$$W_x = \ddot{x}, \quad W_y = \ddot{y}, \quad W_z = \ddot{z}.$$

Модуль ускорения

$$W = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}.$$

Направляющие косинусы, определяющие угол между W с осями координат:

$$\cos(x, W) = \frac{W_x}{W}, \quad \cos(y, W) = \frac{W_y}{W}, \quad \cos(z, W) = \frac{W_z}{W}.$$

Рассмотрим решение некоторых типичных задач.

Задача 1. Ползун движется по прямолинейной направляющей с ускорением $W_x = -\pi^2 \sin \frac{\pi}{2} t$ м/с². Найти уравнение движения ползуна, если его начальная скорость $V_{0x} = 2\pi$ м/с, а начальное положение совпадает со средним положением ползуна, принятым за начало координат.

Решение.

$$\frac{dV_x}{dt} = -\pi^2 \sin \frac{\pi t}{2}, \quad dV_x = -\pi^2 \sin \frac{\pi t}{2} dt,$$

$$V_x = \int -\pi^2 \sin \frac{\pi t}{2} dt = -\pi^2 \frac{2}{\pi} \int \sin \frac{\pi t}{2} d\left(\frac{\pi t}{2}\right) = 2\pi \cos \frac{\pi t}{2} + C_1. \quad (11.2)$$

Так как $\frac{dx}{dt} = V_x$, то

$$x = \int \left(2\pi \cos \frac{\pi t}{2} + C_1\right) dt = 4 \sin \frac{\pi t}{2} + C_1 t + C_2. \quad (11.3)$$

Из уравнений (11.2) и (11.3), подставив начальные условия, находим постоянные C_1 и C_2 :

$$V_x|_{t=0} = 2\pi; \quad C_1 = 0; \quad x|_{t=0} = 0; \quad C_2 = 0.$$

Окончательно из 11.3 получим

$$x = 4 \sin \frac{\pi t}{2}.$$

О т в е т: $x = 4 \sin \frac{\pi t}{2}$.

Задача 2. Движение точки задано уравнениями

$$x = a(e^{kt} + e^{-kt}); \quad y = a(e^{kt} - e^{-kt}),$$

где a и k — заданные постоянные величины. Найти уравнение траектории, скорость и ускорение точки как функции радиуса-вектора $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Р е ш е н и е.

$$\begin{cases} x = a(e^{kt} + e^{-kt}), & (11.4) \\ y = a(e^{kt} - e^{-kt}). & (11.5) \end{cases}$$

Возведем в квадрат уравнения (11.4) и (11.5):

$$\begin{cases} x^2 = a^2(e^{2kt} + e^{-2kt} + 2), & (11.6) \\ y^2 = a^2(e^{2kt} + e^{-2kt} - 2). & (11.7) \end{cases}$$

Вычтем из (11.6) уравнение (11.7), получим уравнение траектории $x^2 - y^2 = 4a^2$ — это гипербола.

Найдем проекции скоростей:

$$\begin{cases} \dot{x} = a(ke^{kt} - ke^{-kt}) = ka(e^{kt} - e^{-kt}), & (11.8) \\ \dot{y} = a(ke^{kt} + ke^{-kt}) = ka(e^{kt} + e^{-kt}). & (11.9) \end{cases}$$

Возведем в квадрат (11.8) и (11.9) и сложим:

$$V^2 = k^2(y^2 + x^2), \quad V = kr.$$

Проекция ускорений:

$$\begin{cases} \ddot{x} = k^2 a(e^{kt} + e^{-kt}), \\ \ddot{y} = k^2 a(e^{kt} - e^{-kt}), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = k^2 x, \\ \ddot{y} = k^2 y, \end{cases}$$

так как $\ddot{x} = W_x$, $\ddot{y} = W_y$, то после сложения

$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2} = k^2 r.$$

О т в е т: $x^2 - y^2 = 4a^2$; $V = kr$, $W = k^2 r$.

Ускорение при естественном способе задания движения. Рассмотрим кривую, не лежащую в плоскости. Возьмем на кривой две близкие друг другу точки M и M_1 и проведем через эти точки орты касательной τ и τ_1 соответственно (рис. 11.16). Перенесем параллельно орт τ_1 , совместив его начало с точкой M , и проведем плоскость Π_0 через орты τ и τ_1 . При неограниченном приближении точки M_1 к точке M проведенная плоскость Π_0 будет вращаться вокруг орта τ и займет определенное положение Π относительно кривой. Предельное положение Π рассматриваемой плоскости Π_0 называется *соприкасающейся плоскостью* кривой в данной точке M (рис. 11.17).

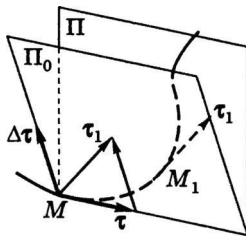


Рис. 11.16

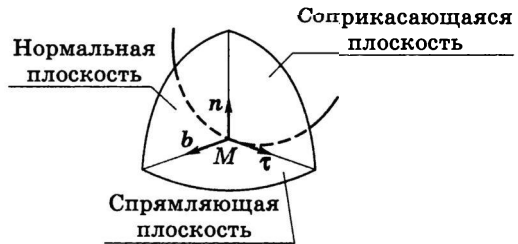


Рис. 11.17

Плоскость, проведенная перпендикулярно к орту τ в точке M , называется *нормальной плоскостью*. Любая прямая в этой плоскости, проходящая через точку M , будет перпендикулярна к орту касательной τ , т.е. будет нормалью кривой. Линия пересечения нормальной плоскости с соприкасающейся называется *главной нормалью кривой* в точке M .

Введем орт главной нормали n , направив его в сторону вогнутости кривой.

Плоскость, проходящая через точку M перпендикулярно к главной нормали, называется *спрямляющей плоскостью* (рис. 11.17). Линия пересечения этой плоскости с нормальной называется *бинормалью кривой*, единичный вектор которой обозначается через b .

Орты τ , n и b ориентированы так же, как i , j и k правой системы координат, т.е. $b = \tau \times n$.

Касательная, главная нормаль и бинормаль кривой называются *естественными осями*, а система координат, которую они образуют, называется *естественным трёхгранником* (триэдром) *кривой* (см. рис. 11.17). Если кривая плоская, то соприкасающейся плоскостью будет плоскость, в которой расположена кривая, а нормаль, лежащая в этой плоскости, будет главной нормалью кривой в точке M .

Обозначим длину дуги MM_1 (рис. 11.18) через $|\Delta\sigma|$. Угол ε , образованный ортами τ и τ_1 , помещенными в точке M , называется *углом смежности*, соответствующим дуге MM_1 .

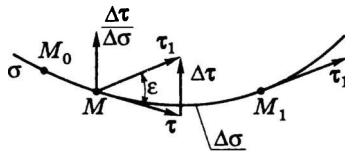


Рис. 11.18

Кривизной кривой в точке M называют предел отношения угла смежности к абсолютному значению длины дуги $MM_1 = \Delta\sigma$:

$$k = \lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{\Delta\sigma}.$$

Радиусом кривизны кривой в точке M называется величина, обратная кривизне:

$$\rho = \frac{1}{k}.$$

Ускорение точки

$$W = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(V_\tau \tau) = \frac{dV_\tau}{dt} \tau + V_\tau \frac{d\tau}{d\sigma};$$

$$\frac{d\tau}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\tau}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta\tau}{\Delta\sigma} \frac{\Delta\sigma}{\Delta t} \right] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta\tau}{\Delta\sigma} \right] \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta\sigma}{\Delta t} \right] = V_\tau \frac{d\tau}{d\sigma}.$$

Таким образом, задача свелась к тому, чтобы вычислить $\frac{d\tau}{d\sigma}$, т.е. по сути определить модуль этой производной и ее направление:

$$|\Delta\tau| = 2 \sin \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\left| \frac{d\tau}{d\sigma} \right| = \lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta\tau}{\Delta\sigma} \right] = \lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\varepsilon}{2}}{\Delta\sigma} = \lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\varepsilon}{2}}{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{\varepsilon}{\Delta\sigma} = \lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{\Delta\sigma} = k = \frac{1}{\rho}.$$

В силу равенств

$$\tau^2 = 1, \quad \frac{d\tau}{d\sigma} \cdot \tau = 0$$

векторы $\frac{d\tau}{d\sigma}$ и τ перпендикулярны, т.е. вектор $\frac{d\tau}{d\sigma}$ лежит в соприкасающейся плоскости и имеет направление n .

Таким образом,

$$\frac{d\tau}{d\sigma} = \frac{n}{\rho} \quad \text{и} \quad \frac{d\tau}{dt} = \frac{V_\tau}{\rho} n, \quad W = \frac{dV_\tau}{dt} \tau + \frac{V^2}{\rho} n,$$

так как $V_\tau^2 = V^2$.

Из этой формулы следует, что вектор W лежит в соприкасающейся плоскости. Ускорение можно представить в виде двух составляющих:

$W = W_\tau + W_n$, где W_τ — касательное ускорение; W_n — нормальное ускорение.

$$\text{Касательное ускорение } W_\tau = \frac{dV_\tau}{dt} \tau. \quad \text{Модуль } W_\tau = \frac{dV_\tau}{dt}.$$

Касательное ускорение характеризует изменение модуля скорости.

Нормальное ускорение $W_n = \frac{V^2}{\rho} \mathbf{n}$. Модуль $W_n = \frac{V^2}{\rho}$.

Нормальное ускорение характеризует изменение скорости по направлению.

Модуль полного ускорения $|W| = \sqrt{W_\tau^2 + W_n^2}$.

Так как $\tau = \frac{V}{V_\tau}$,

$$W_\tau = W_\tau \cdot \tau = \frac{V \cdot W}{V_\tau}.$$

Если заданы функции $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, то

$$W_\tau = \frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}}{\pm\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}; \quad W_n = \sqrt{W^2 - W_\tau^2}.$$

$W_\tau = 0$ при $V = \text{const}$ и когда скорость точки достигает экстремальных значений.

$W_n = 0$ при прямолинейном движении точки ($\rho = \infty$), в точках перегиба криволинейной траектории и когда скорость обращается в нуль.

Если $V_\tau > 0$, $W_\tau > 0$ — движение ускоренное; если $V_\tau < 0$, $W_\tau < 0$ — движение ускоренное; если $V_\tau < 0$, $W_\tau > 0$ — движение замедленное; если $W_\tau = 0$ — движение равномерное.

Задание движения точки

11.6. в криволинейных координатах

Криволинейные системы координат в пространстве являются обобщением прямолинейных. Они состоят из трех однопараметрических семейств поверхностей, расположенных так, что через каждую точку проходит только одна поверхность каждого семейства. Значения параметров для этих трех поверхностей являются криволинейными координатами точки M . Будем считать, что установлен закон выбора однозначного определения положения точки с помощью трех чисел y_1, y_2, y_3 .

Эти числа будут являться криволинейными координатами. Радиус-вектор r , соединяющий точку M с некоторым произвольно выбранным полюсом, также будет функцией y_1, y_2, y_3 , т.е. $r = r(y_1, y_2, y_3)$.

Выберем декартову систему координат. Тогда проекции вектора r на эти оси

$$r_x = x = x(y_1, y_2, y_3),$$

$$r_y = y = y(y_1, y_2, y_3)$$

определяют поверхности, которые называются *координатными поверхностями*.

Касательные к координатным линиям, проведенные в точке M_0 в сторону возрастания соответствующих координат, называются *координатными осями* q_1, q_2, q_3 .

Пусть в момент времени точка находится в положении M_0 (рис. 11.19).

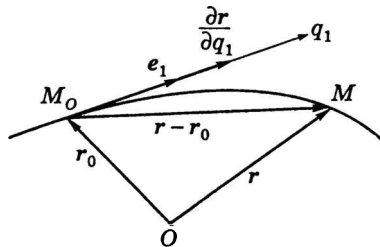


Рис. 11.19

Вектор $\frac{\partial r}{\partial q_1}$, вычисленный в точке, будет направлен по координатной оси q_1 ($q_2 = \text{const}$ и $q_3 = \text{const}$) в сторону возрастания q_1 .

Через единичные векторы i, j, k прямоугольной декартовой системы координат можем написать

$$\frac{\partial r}{\partial q_1} = \frac{\partial x}{\partial q_1} i + \frac{\partial y}{\partial q_1} j + \frac{\partial z}{\partial q_1} k.$$

$$\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1} \right)^2} = H_1.$$

Введем единичный вектор ε_1 вдоль координаты q_1 :

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{H_1} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1}.$$

Принимая поочередно за переменные координаты q_2 и q_3 , аналогично получаем единичные векторы вдоль осей q_2 и q_3 соответственно

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{H_2} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2}; \quad \varepsilon_3 = \frac{1}{H_3} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3},$$

где $H_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i} \right)^2}$, $i = 1, 2, 3$.

Величины H_1, H_2, H_3 называют *коэффициентами Ламе*.

Будем рассматривать только ортогональные криволинейные координаты. Условие ортогональности: $\varepsilon_i \varepsilon_j = 0$ ($i, j = 1, 2, 3$; $i \neq j$).

Скорость точки в криволинейных координатах. Радиус-вектор точки M есть $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1(t), q_2(t), q_3(t))$.

Продифференцируем \mathbf{r} по времени:

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} \frac{\partial q_1}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} \frac{\partial q_2}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3} \frac{\partial q_3}{\partial t} = \\ &= H_1 \dot{q}_1 \varepsilon_1 + H_2 \dot{q}_2 \varepsilon_2 + H_3 \dot{q}_3 \varepsilon_3. \end{aligned}$$

Модуль скорости точки M

$$V = \sqrt{\dot{q}_1^2 H_1^2 + \dot{q}_2^2 H_2^2 + \dot{q}_3^2 H_3^2},$$

$$V_{q_1} = H_1 \dot{q}_1, \quad V_{q_2} = H_2 \dot{q}_2, \quad V_{q_3} = H_3 \dot{q}_3,$$

где $V_{q_1}, V_{q_2}, V_{q_3}$ — проекции скорости на координатные оси q_1, q_2, q_3 соответственно.

Задача. Уравнения движения точки M в цилиндрической системе координат имеют вид $r = a$, $\varphi = kt$, $z = Vt$. Найти проекции скорости точки M на оси цилиндрической системы координат.

нат, уравнения движения точки M , описывающей годограф скорости.

Решение.

Криволинейные координаты (рис. 11.20, а):

$$q_1 = r, \quad x = r \cos \varphi,$$

$$q_2 = \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

$$q_3 = z, \quad z = z.$$

Параметры Ламе: $H_1 = 1$, $H_2 = r$, $H_3 = 1$.

Скорость точки M

$$V = H_1 \dot{q}_1 \varepsilon_1 + H_2 \dot{q}_2 \varepsilon_2 + H_3 \dot{q}_3 \varepsilon_3,$$

$$V = \dot{r} \varepsilon_r + r \dot{\varphi} \varepsilon_\varphi + \dot{z} \varepsilon_z.$$

Проекции скорости точки M на оси цилиндрической системы координат

$$V_r = \dot{r} = 0, \quad V_\varphi = r \dot{\varphi} = ak, \quad V_z = \dot{z} = V.$$

$$\text{Модуль } V = \sqrt{(ak)^2 + V^2}.$$

Полярный радиус годографа скорости (рис. 11.20, б)

$$\rho_1 = \sqrt{V_\varphi^2 + V_r^2} = ak.$$

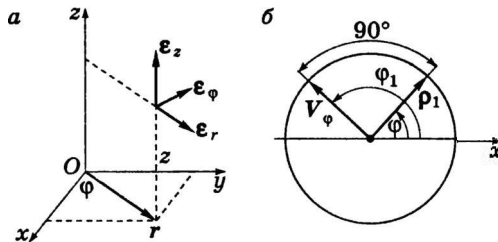


Рис. 11.20

Уравнения годографа в цилиндрических координатах

$$\begin{cases} r_1 = \rho_1 = ak, \\ \varphi_1 = \frac{\pi}{2} + kt, \\ z_1 = V. \end{cases}$$

Продифференцировав уравнения годографа по времени, найдем

$$\begin{cases} V_{r_1} = \dot{r}_1 = 0, \\ V_{\varphi_1} = r_1 \dot{\varphi}_1 = akk = ak^2, \\ V_{z_1} = 0, \end{cases}$$

$$\varphi_1 = \varphi + \arctg \frac{V_{\varphi}}{V_r} = \varphi + \arctg \left(-\operatorname{ctg} \frac{kt}{2} \right) = \frac{\pi}{2} + kt.$$

Таким образом, уравнения годографа скорости (рис. 11.21) имеют вид

$$\begin{cases} r_1 = ak, \\ \varphi_1 = \frac{\pi}{2} + kt. \end{cases}$$

Продифференцировав эти уравнения по времени, найдем

$$V_{r_1} = \dot{r}_1 = 0, \quad V_{\varphi_1} = r_1 \dot{\varphi}_1 = ak^2.$$

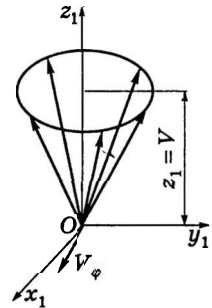


Рис. 11.21

О т в е т: $V_r = \dot{r} = 0$; $V_{\varphi} = r\dot{\varphi} = ak$; $V_z = \dot{z} = V$; $r_1 = ak$; $\varphi_1 = \frac{\pi}{2} + kt$.

Ускорение точки в криволинейных координатах. Проекция ускорения точки на координатную ось q_1

$$W_{q_1} = W \varepsilon_1 = \frac{dV}{dt} \frac{1}{H_1} \frac{\partial r}{\partial q_1}.$$

Тогда

$$H_1 W_{q_1} = \frac{dV}{dt} \frac{\partial r}{\partial q_1} = \frac{d}{dt} \left(V \frac{\partial r}{\partial q_1} \right) - V \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial r}{\partial q_1} \right).$$

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_1} = H_1 \varepsilon_1,$$

так как $H_1 \varepsilon_1 = \frac{\partial r}{\partial q_1}$, то $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial r}{\partial q_1}$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \dot{q}_1} \right) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}(q_1, q_2, q_3)}{\partial \dot{q}_1} \right) = \frac{\partial}{\partial q_1} \left[\frac{d}{dt} \mathbf{r} \right] = \\ &= \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3} \dot{q}_3 \right) = \\ &= \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_1^2} \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_2 \partial q_1} \dot{q}_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3 \partial q_1} \dot{q}_3. \end{aligned}$$

Но

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \dot{q}_1} &= \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_1^2} \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_2 \partial q_1} \dot{q}_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3 \partial q_1} \dot{q}_3, \\ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial q_1} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} \right). \end{aligned}$$

С учетом полученных соотношений

$$H_1 W_{q_1} = \frac{d}{dt} \left(\mathbf{V} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} \right) - \mathbf{V} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} \right) = \frac{d}{dt} \left(\mathbf{V} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \dot{q}_1} \right) - \mathbf{V} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial q_1}.$$

Так как $\mathbf{V}^2 = V^2$, то

$$\mathbf{V} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \dot{q}_1} = V \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} \left(\frac{V^2}{2} \right),$$

$$V \frac{\partial V}{\partial q_1} = \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{V^2}{2} \right).$$

$$W_{q_1} = \frac{1}{H_1} \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} \left(\frac{V^2}{2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{V^2}{2} \right) \right\},$$

$$W_{q_2} = \frac{1}{H_2} \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_2} \left(\frac{V^2}{2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{V^2}{2} \right) \right\},$$

$$W_{q_3} = \frac{1}{H_3} \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_3} \left(\frac{V^2}{2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{V^2}{2} \right) \right\}.$$

Пусть требуется найти скорость и ускорение точки в сферической системе координат r, φ, θ с базисом $(\varepsilon_r, \varepsilon_\varphi, \varepsilon_\theta)$, если криволинейные координаты $q_1 = r, q_2 = \varphi, q_3 = \theta$ (рис. 11.22).

Запишем связь между прямоугольной и сферической системами координат:

$$x = r \cos \theta \cos \varphi,$$

$$y = r \cos \theta \sin \varphi,$$

$$z = r \sin \theta.$$

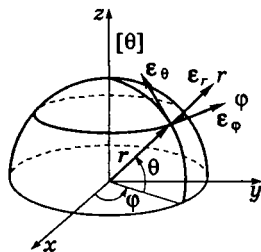


Рис. 11.22

Определим координаты Ламе:

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos \theta \cos \varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \cos \theta \sin \varphi, \quad \frac{\partial z}{\partial r} = \sin \theta, \quad H_1 = 1;$$

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r \cos \theta \sin \varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = r \cos \theta \cos \varphi, \quad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0, \quad H_2 = r \cos \theta;$$

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = -r \cos \theta \sin \varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = -r \sin \theta \sin \varphi, \quad \frac{\partial z}{\partial \theta} = r \cos \theta, \quad H_3 = r.$$

Скорость точки

$$V_\theta = r\dot{\theta}, \quad V_r = \dot{r}, \quad V_\varphi = r\dot{\varphi} \cos \theta,$$

$$V^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta + r^2 \dot{\theta}^2.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{V^2}{2} \right) = r\dot{\varphi} \cos^2 \theta + r^2 \dot{\theta}^2,$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{V^2}{2} \right) = -r^2 \dot{\varphi}^2 \cos \theta \sin \theta,$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{V^2}{2} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \dot{r}} \left(\frac{V^2}{2} \right) = \dot{r},$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} \left(\frac{V^2}{2} \right) = r^2 \dot{\theta}, \quad \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} \left(\frac{V^2}{2} \right) = -r^2 \dot{\varphi} \cos^2 \theta.$$

Производная по времени:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{r}} \left(\frac{V^2}{2} \right) \right) = \dot{r},$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} \left(\frac{V^2}{2} \right) \right] = \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) = 2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2 \ddot{\theta},$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{\phi}} \left(\frac{V^2}{2} \right) \right] = \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\phi} \cos^2 \theta) =$$

$$= r\dot{r}\dot{\phi} \cos^2 \theta + r^2 \ddot{\phi} \cos^2 \theta - 2r^2 \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta \sin \theta.$$

Проекция ускорений:

$$W_r = \dot{r} - r\dot{\phi}^2 \cos^2 \theta - r\dot{\theta}^2,$$

$$W_\phi = \frac{1}{r \cos \theta} (r^2 \ddot{\phi} \cos^2 \theta + r\dot{r}\dot{\phi} \cos^2 \theta - 2r\dot{\phi}\dot{\theta} \sin \theta) =$$

$$= r\ddot{\phi} \cos \theta + 2\dot{r}\dot{\phi} \cos \theta - 2\dot{\phi}\dot{\theta} \sin \theta,$$

$$W_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} + r\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta.$$

Аналогично можно получить проекции ускорений и в других ортогональных системах координат.

12

КИНЕМАТИКА АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

12.1. Поступательное движение твердого тела

При поступательном движении абсолютно твердого тела за любой промежуток времени векторы перемещения всех его точек равны. Пусть в момент времени t_1 тело находилось в положении I , а в момент времени t_2 — в положении II (рис. 12.1).

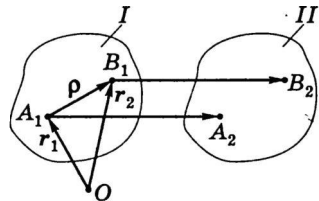


Рис. 12.1

Рассмотрим некоторую точку A_1 тела в момент времени t_1 , которая перешла в положение A_2 за промежуток времени $t_2 - t_1$. Вектор A_1A_2 представляет перемещение рассматриваемой точки за данный промежуток времени. Если для любой другой точки B_1 перемещение за промежуток времени $t_2 - t_1$ представляется вектором B_1B_2 , таким, что $B_1B_2 = A_1A_2$, то движение абсолютно твердого тела называется *поступательным*.

При поступательном движении траектории всех точек тела одинаковы.

Положение точек A_1 и B_1 можно определить с помощью радиусов-векторов r_1 и r_2 , проведенных из некоторого центра O . При этом

$$r_2 = r_1 + \rho,$$

где $r_2 = r_2(t)$, $r_1 = r_1(t)$, $\rho = \text{const.}$

Тогда скорости точек $\frac{dr_2}{dt} = \frac{dr_1}{dt}$, т.е. $V_2 = V_1$.

Ускорения $\frac{d^2r_2}{dt^2} = \frac{d^2r_1}{dt^2}$ или $\frac{dV_2}{dt} = \frac{dV_1}{dt}$, т.е. $W_2 = W_1$.

Следовательно, при поступательном движении перемещения, скорости и ускорения точек тела равны, что дает возможность исследовать движение только одной точки тела.

12.2. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

Вращением твердого тела вокруг неподвижной оси называется такое движение тела, при котором какие-либо две его точки (или две точки, неизменно с ним связанные) во все время движения неподвижны.

Прямая, проходящая через указанные две неподвижные точки, называется *осью вращения*. Точки тела, не лежащие на оси вращения, описывают окружности, плоскости которых перпендикулярны к оси и центры лежат на оси.

Рассмотрим тело, вращающееся вокруг неподвижной оси Oz (рис. 12.2).

Выберем на оси вращения Oz положительное направление и проведем через ось две полуплоскости: неподвижную P_0 и движущуюся P , неизменно связанную с вращающимся телом. Угол φ между этими полуплоскостями, соответствующий некоторому моменту t , условимся отсчитывать от неподвижной полуплоскости к подвижной.

Угол φ считается положительным, если с положительного направления осей вращения происходит в направлении, противоположном движению часовой стрелки, и отрицательным — если по ходу часовой стрелки.

Уравнение вращения тела вокруг неподвижной оси имеет вид

$$\varphi = \varphi(t).$$

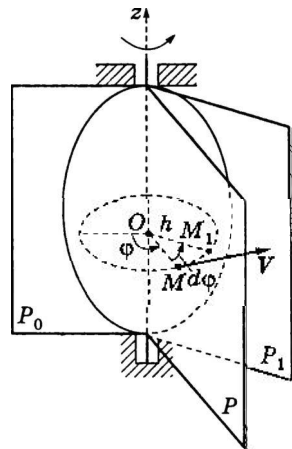


Рис. 12.2

Характеристикой быстроты и направления вращения служит угловая скорость тела

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}.$$

Если $\dot{\varphi} > 0$, то φ возрастает. Если $\dot{\varphi} < 0$, то φ убывает. Таким образом, знак ω показывает направление вращения.

Характеристикой быстроты изменения ω при изменении t служит угловое ускорение ε .

Угловым ускорением тела называется производная от угловой скорости по времени:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega}.$$

Если $\varepsilon = \dot{\omega} > 0$, то ω возрастает — вращение называется *ускоренным*. Если $\varepsilon = \dot{\omega} < 0$, то ω убывает — вращение называется *замедленным*.

За единицу угла поворота φ принят 1 радиан; угловой скорости — 1 рад/с; углового ускорения — 1 рад/с².

Вектором угловой скорости твердого тела, совершающего вращение вокруг неподвижной оси, называется вектор, модуль которого равен абсолютному значению производной угла поворота тела по времени и который направлен вдоль оси вращения в ту сторону, откуда вращение тела видно происходящим против хода часовой стрелки:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \mathbf{k}; \quad \begin{cases} \dot{\varphi} > 0, & \omega \text{ совпадает по направлению с } \mathbf{k}; \\ \dot{\varphi} < 0, & \omega \text{ направлен противоположно вектору } \mathbf{k}, \end{cases}$$

где \mathbf{k} — единичный вектор оси вращения.

Вектор углового ускорения

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \mathbf{k} = \frac{d\omega}{dt} \mathbf{k}.$$

Равномерное и равнопеременное движение. Вращение тела, как и движение точек тела, может быть равномерным или равнопеременным. В табл. 12.1 приведена математическая аналогия формул вращательного движения твердого тела и движения точки.

Таблица 12.1

Таблица аналогии формул движения

Движение точки	Вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси
Уравнение движения точки по траектории: $s = s(t)$	Уравнение вращения тела: $\varphi = \varphi(t)$
Величина скорости точки: $V = \dot{s}$	Угловая скорость тела: $\omega = \dot{\varphi}$
Величина касательного ускорения: $W_{\tau} = \dot{V}$	Угловое ускорение тела: $\varepsilon = \dot{\omega}$
Равномерное движение точки: $W_{\tau} = 0, V = \text{const}, s = Vt$	Равномерное вращательное движение тела: $\varepsilon = 0, \omega = \text{const}, \varphi = \omega t$
Равнопеременное движение точки: $W_{\tau} = \text{const},$ $V = V_0 + W_{\tau}t,$ $s = V_0t + \frac{W_{\tau}t^2}{2}$	Равнопеременное вращательное движение тела: $\varepsilon = \text{const},$ $\omega = \omega_0 + \varepsilon t,$ $\varphi = \omega_0t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$

Примечание. V_0 — начальная скорость точки; ω_0 — начальная угловая скорость тела.

Скорости и ускорения точек вращающегося твердого тела

Пусть $MM_1 = ds$ (см. рис. 12.2) — путь, пройденный некоторой точкой M за время dt .

Следовательно,

$$d\varphi = \frac{ds}{h},$$

где $h = MO$ — расстояние от точки M до оси вращения.

Отсюда $ds = h |d\varphi|$.

Модуль скорости точки M

$$V = \frac{ds}{dt} = h \left| \frac{d\varphi}{dt} \right| = h |\omega|.$$

Скорость точки вращающегося твердого тела называют *вращательной скоростью*. Модуль вращательной скорости точки равен произведению абсолютной величины угловой скорости тела на расстояние от точки до оси вращения.

Касательное ускорение точки вращающегося тела иначе называется *вращательным ускорением* W_τ , а нормальное ускорение W_n — *центростремительным*. Модули этих ускорений определяются соответственно как

$$W_\tau = |\dot{V}| = h |\dot{\omega}| = h |\varepsilon|, \quad W_n = \frac{V^2}{h} = h\omega^2.$$

При ускоренном вращении W_τ направлено в ту же сторону, что и V ; при замедленном вращении W_τ направлено в сторону, противоположную V .

Центростремительное ускорение направлено по нормали к траектории в сторону вогнутости, т.е. к центру окружности, описываемой точкой.

Модуль полного ускорения

$$W = \sqrt{W_\tau^2 + W_n^2} = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Угол отклонения вектора полного ускорения от радиуса описываемой точкой окружности определяется как

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{|W_\tau|}{W_n}.$$

Учитывая значения W_τ и W_n , получаем

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}.$$

Отметим, что ε и ω в этом случае для всех точек тела одно и то же значение.

В технике скорость равномерного вращения часто определяют числом оборотов в минуту (об./мин), которое обозначают

через n . При одном обороте тело поворачивается на угол $\varphi = 2\pi$, а при n оборотах — $\varphi = 2\pi n$. Считая, что этот поворот делается за $t = 60$ с, из условия равномерного движения $\omega = \frac{\varphi}{t}$ получим

связь между ω и n :

$$\omega = \frac{\pi n}{30} \approx 0,1 n.$$

Задача. Пусть вал, делающий $n = 90$ об./мин, после выключения двигателя начинает вращаться равнозамедленно и останавливается через $t_1 = 40$ с. Определить, сколько оборотов сделает вал за это время.

Решение.

Так как вал вращается равнозамедленно, то

$$\varphi = \omega_0 t + \varepsilon \frac{t^2}{2}, \quad (12.1)$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t. \quad (12.2)$$

Начальной угловой скоростью будет скорость до выключения двигателя. Следовательно,

$$\omega_0 = \frac{\pi n}{30}.$$

В момент остановки при $t = t_1$ угловая скорость вала $\omega_1 = 0$. Подставляя эти значения в уравнение (12.2), получаем

$$\varepsilon = -\frac{\pi n}{30 t_1}.$$

Пусть число сделанных валом оборотов за время t_1 будет N , тогда угол поворота за то же время $\varphi_1 = 2\pi N$. Из уравнения (12.1) получим

$$2\pi N = \frac{\pi n}{30} t_1 - \frac{\pi n}{60} t_1 = \frac{\pi n}{60} t_1,$$

откуда

$$N = \frac{n t_1}{120} = 30 \text{ об.}$$

О т в е т: $N = \frac{n t_1}{120} = 30 \text{ об.}$

Плоскопараллельное движение 12.4. твердого тела

Движение твердого тела называется *плоскопараллельным*, если все его точки движутся параллельно некоторой неподвижной плоскости. Примерами могут служить движение колеса по прямолинейному пути, движение шатуна в кривошипно-ползунном механизме, движение кусочка мела по доске и др.

Пусть тело A (рис. 12.3) движется так, что траектории всех его точек параллельны плоскости Q . Проведя плоскость Q_1 , параллельную плоскости Q и пересекающую тело, получим в сечении некоторую плоскую фигуру S . Во время движения фигура S остается в плоскости Q_1 и движение тела A вполне определяется движением плоской фигуры S . Точки тела, лежащие на одном перпендикуляре к плоскости Q_1 , движутся одинаково.

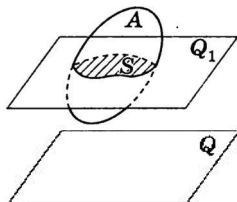


Рис. 12.3

Движение фигуры S (рис. 12.4) в ее плоскости вполне определяется движением двух ее точек M_1 и M_2 , т.е. движением отрезка M_1M_2 .

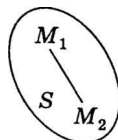


Рис. 12.4

Всякое перемещение плоской фигуры в ее плоскости можно рассматривать состоящим из поступательного перемещения и поворота вокруг оси, перпендикулярной к плоскости фигуры, проходящей через произвольную точку.

Пусть плоская фигура S перемещается в плоскости (рис. 12.5). Рассмотрим два ее положения: начальное положение относительно неподвижной системы координат O_1xy (a) и положение в рассматриваемый момент (b). Обозначим Ox_1y_1 — оси координат, неизменно связанные с фигурой, которые через начальный момент времени параллельны осям неподвижной системы O_1xy .

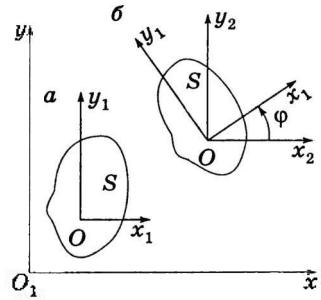


Рис. 12.5

Возьмем дополнительные оси Ox_2y_2 , где $Ox_2 \parallel O_1x$ и $Oy_2 \parallel O_1y$.

Точка O (она произвольна) называется **полюсом**.

Таким образом, перемещение плоской фигуры в ее плоскости можно рассматривать состоящим из поступательного движения вместе с полюсом и вращательного вокруг оси, проходящей через полюс перпендикулярно к плоскости фигуры. Угол поворота φ зависит от времени и не зависит от выбора полюса.

Скорость любой точки M плоской фигуры можно рассматривать как скорость точки, участвующей одновременно в двух движениях:

1) скорость V_O полюса (поступательное движение);

2) скорость $V_{вр}$ вращательного движения вокруг оси, проходящей через полюс перпендикулярно к плоскости фигуры (рис. 12.6), т.е.

$$V_M = V_O + V_{вр}.$$

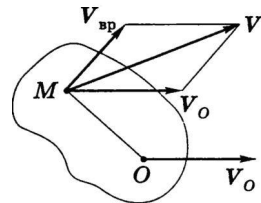


Рис. 12.6

Вектор вращательной скорости направлен перпендикулярно к отрезку OM в сторону вращения плоской фигуры и определяется как $V_{вр} = \omega \times OM$, а его модуль $V_{вр} = \omega OM$.

12.5. Мгновенный центр скоростей

Докажем теорему: проекции скоростей двух точек твердого тела на прямую, соединяющую эти точки, равны друг другу.

Рассмотрим какие-нибудь две точки тела — A и B (рис. 12.7). Принимая точку A за полюс, получаем $V_B = V_A + V_{BA}$. Отсюда, проецируя обе части равенства на линию AB , находим $V_B \cos \beta = V_A \cos \alpha$. Теорема доказана.

Мгновенным центром скоростей называется точка плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю. Если угловая скорость плоской фигуры отлична от нуля, то мгновенный центр скоростей существует.

Пусть в момент времени t точки A и B тела, лежащие в сечении S , движутся со скоростями V_A и V_B (рис. 12.8).

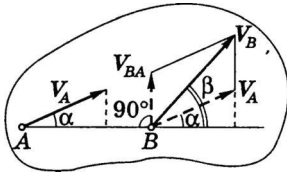


Рис. 12.7

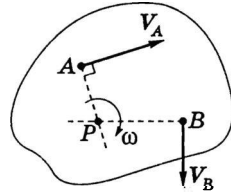


Рис. 12.8

Тогда точка P , лежащая на пересечении перпендикуляров AP и BP к скоростям V_A и V_B , будет мгновенным центром скоростей, т.е. $V_P = 0$ (см. доказанную теорему).

Если точку P принять за полюс, то скорость точки A $V_A = V_P + V_{AP}$, но $V_P = 0$, следовательно, $V_A = V_{AP}$.

При этом

$$V_A = \omega PA, \quad V_A \perp PA,$$

$$V_B = \omega PB, \quad V_B \perp PB.$$

Из равенств следует, что

$$\frac{V_A}{PA} = \frac{V_B}{PB},$$

т.е. скорости точек тела пропорциональны их расстояниям до мгновенного центра скоростей.

На основании вышеизложенного можно сформулировать следующие *выводы*.

1. Для определения мгновенного центра скоростей надо знать только направления скоростей V_A и V_B двух точек A и B сечения тела (или траектории этих точек); мгновенный центр скоростей находится в точке пересечения перпендикуляров, восстановленных из точек A и B к скоростям этих точек (или к касательным к траекториям).

2. Для определения скорости любой точки тела надо знать модуль и направление скорости какой-нибудь одной точки A тела и направление скорости другой его точки B . Тогда, восстановив из точек A и B перпендикуляры к V_A и V_B , можно построить мгновенный центр скоростей P . Зная V_A , можно найти скорость V_M любой точки M тела. Вектор V_M направлен перпендикулярно к PM в сторону поворота тела.

3. Угловая скорость тела в каждый момент времени равна отношению скорости какой-нибудь точки, например B , в сечении S к ее расстоянию от мгновенного центра P :

$$\omega = \frac{V_B}{PB}.$$

Скорости точек тела при плоском движении распределяются так же, как и при вращательном, вокруг мгновенной оси вращения, проходящей через мгновенный центр скоростей.

Графическое нахождение мгновенного центра скоростей показано на рис. 12.9.

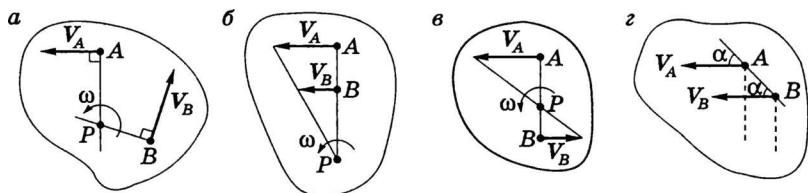


Рис. 12.9

Во всех четырех случаях известны направления скоростей точек A и B тела. Мгновенный центр скоростей (точка P) определяется пересечением перпендикуляров, восстановленных к скоростям V_A и V_B . В четвертом случае (см. рис. 12.9, z) мгновенного центра не существует ($\omega=0$) и тело в данный момент времени будет совершать поступательное движение ($V_A = V_B$).

Задача. Пусть в механизме, изображенном на рис. 12.10, угловая скорость кривошипа O_1A в данный момент равна ω_0 . Предполагая известными размеры механизма и расстояния от точек A , B и C до мгновенных центров скоростей звеньев, найти скорость V_C ползуна C .

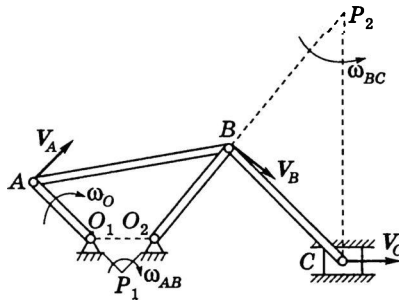


Рис. 12.10

Решение.

Скорость точки A известна по модулю и направлению:

$$V_A \perp O_1A, \quad V_A = O_1A \omega_0. \quad (12.3)$$

Известно направление V_B точки B кривошипа O_2B ($V_B \perp O_2B$). Известны направления скоростей V_A и V_B двух точек A и B шатуна AB . Мгновенный центр шатуна P_1 — точка пересечения перпендикуляров, восстановленных к V_A и V_B .

Найдем ω_{AB} — угловую скорость шатуна AB :

$$V_A = \omega_{AB} A P_1. \quad (12.4)$$

Приравняв правые части равенств (12.3) и (12.4), получим

$$\omega_{AB} = \frac{O_1A}{AP_1} \omega_0.$$

V_B можно рассматривать как вращательную скорость точки B шатуна вокруг мгновенного центра P_1 . Отсюда модуль этой скорости

$$V_B = \omega_{AB} \cdot BP_1 = \frac{O_1A \cdot BP_1}{AP_1} \omega_0. \quad (12.5)$$

Рассмотрим движение шатуна BC . Восстановив перпендикуляры к V_B и V_C , получим P_2 — мгновенный центр скоростей шатуна BC . Найдем ω_{BC} — угловую скорость шатуна BC :

$$V_B = \omega_{BC} BP_2. \quad (12.6)$$

Приравняв правые части уравнений (12.5) и (12.6), получим

$$\omega_{BC} = \frac{O_1A}{A P_1} \frac{BP_1}{BP_2} \omega_0.$$

Модуль скорости точки C

$$V_C = \omega_{BC} CP_2 = \frac{O_1A}{AP_1} \frac{BP_1}{BP_2} \frac{CP_2}{BP_2} \omega_0.$$

О т в е т: $V_C = \omega_{BC} CP_2 = \frac{O_1A}{AP_1} \frac{BP_1}{BP_2} \frac{CP_2}{BP_2} \omega_0.$

12.6. Подвижная и неподвижная центры

Геометрическое место мгновенных центров скоростей, отмеченных на неподвижной плоскости, называется *неподвижной центроидой*.

Геометрическое место мгновенных центров скоростей, отмеченных на плоскости, жестко связанной с фигурой, называется *подвижной центроидой*.

В каждый момент времени подвижная и неподвижная центроиды имеют общую точку касания — мгновенный центр

скоростей P , т.е. точку, скорость которой равна нулю. Поэтому плоское движение можно представить как качение без скольжения подвижной центроиды по неподвижной.

Задача. Пусть стержень AB движется таким образом, что одна из его точек A описывает окружность радиусом r с центром в точке O , а сам стержень проходит постоянно через точку N , лежащую на той же окружности (рис. 12.11, *a*). Найти центроиды стержня.

Решение.

Направления скорости точки A и N известны. Восстановив перпендикуляры к скоростям V_A и V_N , найдем точку P — мгновенный центр скоростей стержня AB (рис. 12.11, *б*). Так как точки A и N лежат на окружности и $\angle ANP = 90^\circ$, то и точка P лежит на этой же окружности, а отрезок AP является ее диаметром.

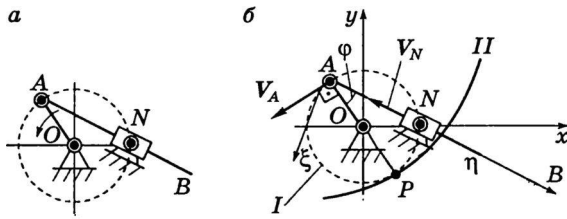


Рис. 12.11

На рис. 12.11, *б* I — неподвижная центроида; II — подвижная центроида

Обозначим $\angle PAN = \varphi$, тогда $\angle PON = 2\varphi$, как центральный угол, опирающийся на дугу PN . Введем подвижную систему координат, неизменно связанную со стержнем AB : ось $A\eta$ идет по AB , а ось $A\xi$ ей перпендикулярна (см. рис. 12.11, *б*). Определяем координаты точки P как в неподвижной, так и в подвижной системе координат:

$$\begin{cases} x = OP \cos 2\varphi = r \cos 2\varphi, \\ y = -OP \sin 2\varphi = -r \sin 2\varphi; \end{cases} \quad (12.7)$$

$$\begin{cases} \xi = OP \sin \varphi = 2r \sin \varphi, \\ \eta = OP \cos \varphi = 2r \cos \varphi. \end{cases} \quad (12.8)$$

Уравнения (12.7) являются уравнениями неподвижной центроиды, а уравнения (12.8) — подвижной. Уравнения (12.7) преобразуем к виду

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

а уравнения (12.8) к виду

$$\xi^2 + \eta^2 = 4r^2.$$

О т в е т: Неподвижная центроида — это окружность радиусом r с центром в точке O : $x^2 + y^2 = r^2$; подвижная центроида — окружность радиусом $2r$ с центром в точке A : $\xi^2 + \eta^2 = 4r^2$.

Определение ускорений точек тела

12.7. при плоскопараллельном движении

Положение точки M по отношению к осям Oxy (рис. 12.12) при плоскопараллельном движении определяется радиусом-вектором $\mathbf{r} = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}'$.

Ускорение этой точки

$$\mathbf{W}_M = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2\mathbf{r}_A}{dt^2} + \frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2}.$$

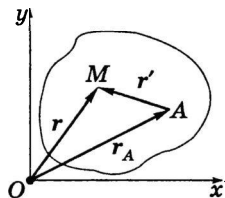


Рис. 12.12

Величина $\frac{d^2\mathbf{r}_A}{dt^2}$ равна ускорению \mathbf{W}_A полюса A , а величина $\frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2} = \mathbf{W}_{MA}$ определяет ускорение, получаемое точкой M при ее вращении вместе с телом вокруг полюса A . Следовательно, ускорение точки M

$$\mathbf{W}_M = \mathbf{W}_A + \mathbf{W}_{MA}. \quad (12.9)$$

Ускорение точки M во вращательном движении вокруг полюса A

$$W_{MA} = MA\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4},$$

где ω и ε — угловая скорость и угловое ускорение тела.

Угол μ (рис. 12.13) между направлением W_{MA} и отрезком MA

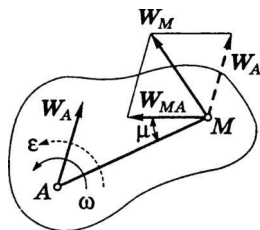


Рис. 12.13

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}.$$

Из (12.9) следует, что ускорение любой точки M тела геометрически складывается из ускорения какой-нибудь другой точки, принятой за полюс, и ускорения точки M в ее вращении вместе с телом вокруг этого полюса.

Вектор W_{MA} удобно представлять касательной и нормальной составляющими:

$$W_{MA} = W_{MA}^{\tau} + W_{MA}^n, \quad (12.10)$$

где $W_{MA}^{\tau} = AM\varepsilon$, $W_{MA}^n = AM\omega^2$.

Вектор W_{MA}^n всегда направлен от точки M к полюсу A , его направление зависит от вращения, которое может быть ускоренным (рис. 12.14, а) или замедленным (рис. 12.14, б).

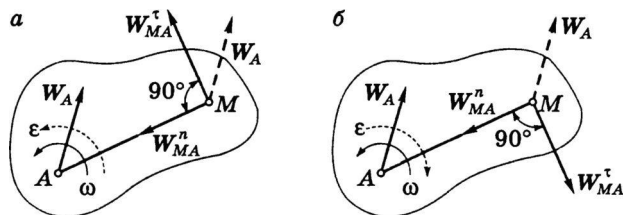


Рис. 12.14

Тогда уравнение (12.9) с учетом (12.10) можно записать как

$$W_M = W_A + W_{MA}^{\tau} + W_{MA}^n.$$

Если полюс A движется по криволинейной траектории, то его ускорение будет складываться из касательного и нормального. Тогда ускорение точки M

$$W_M = W_{At} + W_{An} + W_{MA}^t + W_{MA}^n.$$

12.8. Мгновенный центр ускорений

Мгновенным центром ускорений называется точка плоской фигуры, ускорение которой в данный момент времени равно нулю. Для построения мгновенного центра ускорений предполагается, что известны W_A , ω и ε , причем $\omega \neq 0$ и $\varepsilon \neq 0$ одновременно. Определим мгновенный центр ускорений.

Из точки A отложим под углом $\alpha = \arctg \frac{\varepsilon}{\omega^2}$ к ускорению

W_A отрезок $AQ = \frac{W_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}$; при этом, если $\varepsilon > 0$, то α откладывается против хода часовой стрелки, если $\varepsilon < 0$ — по ходу часовой стрелки (рис. 12.15).

Докажем, что $W_Q = 0$, т.е. точка Q является мгновенным центром ускорений: $W_Q = W_A + W_{QA}$; $W_{QA} \parallel W_A$ и противоположно направлены:

$$W_{QA} = AQ \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = \frac{W_A \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} = W_A,$$

следовательно,

$$W_Q = W_A + W_{QA} = 0.$$

Принимая Q за полюс, получаем

$$W_A = W_Q + W_{QA} = W_{QA}^t + W_{QA}^n.$$

Следует иметь в виду, что мгновенный центр ускорений и мгновенный центр скоростей — разные точки, и в общем случае они не совпадают.

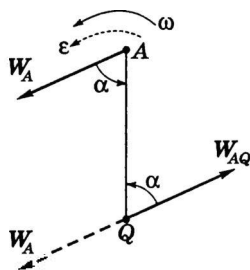


Рис. 12.15

Задача. Пусть муфты A и B , скользящие вдоль прямолинейных образующих, соединены стержнем AB длиной l . Муфта A движется с постоянной скоростью V_A . Определить ускорение муфты B и угловое ускорение стержня AB в положении, при котором стержень AB образует с прямой OB заданный угол φ (рис. 12.16, a).

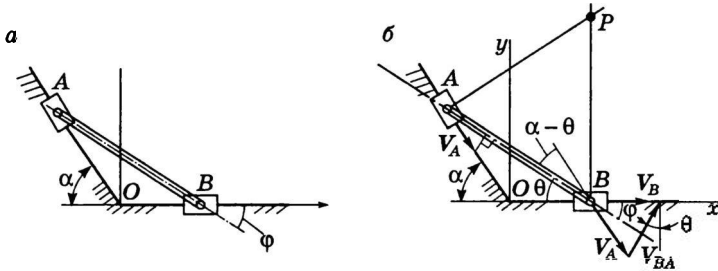


Рис. 12.16

Решение.

Обозначим θ текущий угол, определяющий положение стержня в системе координат Oxy (рис. 12.16, b).

Для точки B

$$V_B = V_A + V_{BA}.$$

Спроецируем на ось y данное равенство, откуда

$$V_{BA} = \frac{V_A \sin \alpha}{\cos \theta}.$$

Но $V_{BA} = \omega_{AB} l$, тогда

$$\omega_{AB} l = \frac{V_A \sin \alpha}{\cos \theta}, \quad \omega_{AB} = \frac{V_A \sin \alpha}{l \cos \theta},$$

где $\omega_{AB} = \dot{\theta}$.

Дифференцируем ω_{AB} по t :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{AB} &= \frac{d\omega_{AB}}{dt} = \frac{V_A \sin \alpha}{l} \frac{d}{dt} [(\cos \theta)^{-1}] = \frac{V_A \sin \alpha}{l \cos^2 \theta} \dot{\theta} \sin \theta = \\ &= \frac{V_A \sin \alpha \sin \theta}{l \cos^2 \theta} \frac{V_A \sin \alpha}{l \cos \theta} = \frac{V_A^2 \sin^2 \alpha}{l^2 \cos^3 \theta} \sin \theta. \end{aligned}$$

При $\theta = \varphi$

$$\varepsilon_{AB} = \frac{V_A^2 \sin^2 \alpha}{l^2 \cos^3 \varphi} \sin \varphi.$$

Запишем уравнение для ускорения точки B:

$$W_B = W_A + W_{BA}^n + W_{BA}^\tau.$$

$$W_A = 0, \quad W_B = W_{BA}^n + W_{BA}^\tau.$$

$$W_B = \sqrt{(W_{BA}^n)^2 + (W_{BA}^\tau)^2},$$

$$W_{BA}^n = \omega_{AB}^2 l = \frac{V_A^2 \sin^2 \alpha}{l \cos^2 \theta}, \quad W_{BA}^\tau = \varepsilon_{AB} l = \frac{V_A^2 \sin^2 \alpha \sin \theta}{l \cos^3 \theta},$$

$$W_{BA}^n|_{\theta=\varphi} = \frac{V_A^2 \sin^2 \alpha}{l \cos^2 \varphi}, \quad W_{BA}^\tau|_{\theta=\varphi} = \frac{V_A^2 \sin^2 \alpha \sin \varphi}{l \cos^3 \varphi},$$

$$W_B^2|_{\theta=\varphi} = \frac{V_A^4}{l^2} \frac{\sin^4 \alpha}{\cos^4 \varphi} \left(1 + \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} \right), \quad W_B = \frac{V_A^2}{l} \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^3 \varphi}.$$

О т в е т: $W_{BA}^n|_{\theta=\varphi} = \frac{V_A^2 \sin^2 \alpha}{l \cos^2 \varphi}, \quad W_{BA}^\tau|_{\theta=\varphi} = \frac{V_A^2 \sin^2 \alpha \sin \varphi}{l \cos^3 \varphi},$

$$W_B^2|_{\theta=\varphi} = \frac{V_A^4}{l^2} \frac{\sin^4 \alpha}{\cos^4 \varphi} \left(1 + \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} \right), \quad W_B = \frac{V_A^2}{l} \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^3 \varphi}.$$

13

ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ И ДВИЖЕНИЕ СВОБОДНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Движение твердого тела, имеющего одну неподвижную точку

13.1.

Рассмотрим движение твердого тела по отношению к системе отсчета $Ox_1y_1z_1$, закрепленного так, что одна его точка O остается во все время движения неподвижной. Свяжем жестко с телом трехгранник $Oxyz$, положение которого характеризует положение тела (рис. 13.1).

Линия OK , вдоль которой пересекаются плоскости Oxy и Ox_1y_1 , называется *линией узлов*.

Угол ψ называется *углом прецессии*, φ — *углом собственного вращения*, θ — *углом нутации*. Данные углы называются *эйлеровыми углами*.

Приведем без доказательства следующее утверждение Эйлера — Даламбера: всякое элементарное перемещение тела, имеющего неподвижную точку, представляет собой элементарный поворот вокруг некоторой мгновенной оси вращения, проходящей через эту точку.

Мгновенная ось представляет собой геометрическое место точек тела, скорости которых в данный момент времени равны нулю.

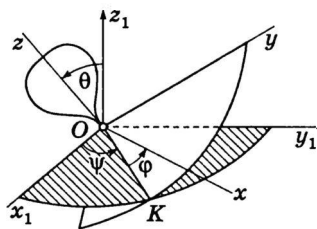


Рис. 13.1

Угловая скорость ω , с которой тело совершает элементарный поворот вокруг мгновенной оси вращения, называется *угловой скоростью тела в данный момент времени* или *мгновенной угловой скоростью тела*. Мгновенную угловую скорость можно изобразить в виде соответствующего вектора ω , направленного вдоль мгновенной оси. Поскольку направление мгновенной оси (рис. 13.2) непрерывно изменяется (OP, OP_1, OP_2), то вектор ω будет со временем изменяться не только по численной величине, но и по направлению ($\omega, \omega_1, \omega_2$), а его конец A будет описывать в пространстве некоторую кривую AD , являющуюся годографом вектора ω .

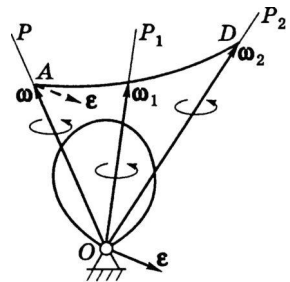


Рис. 13.2

Угловое ускорение тела в данный момент времени, или мгновенное угловое ускорение, определяющее в данном случае изменение угловой скорости и по модулю, и по направлению, будет векторной величиной, равной

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}.$$

Угловое ускорение можно вычислять как скорость, с которой конец вектора ω перемещается вдоль кривой AD (см. рис. 13.2).

Направление ε совпадает с направлением касательной к кривой AD в соответствующей точке.

13.2. Скорости и ускорения точек тела

При движении тела около неподвижной точки O модуль скорости какой-нибудь его точки M (рис. 13.3) будет определяться равенством

$$V = \omega h,$$

где h — расстояние точки M до мгновенной оси вращения OP .

Вектор скорости V направлен перпендикулярно к плоскости MOP , проходящей через мгновенную ось и точку M , в сторону поворота тела.

Величина h есть переменная, и поэтому для определения V удобно использовать другой подход. Рассмотрим векторное произведение $\omega \times r$, где r — радиус-вектор, проведенный из неподвижной точки O в точку M . По модулю

$$|\omega \times r| = \omega r \sin \alpha = \omega h.$$

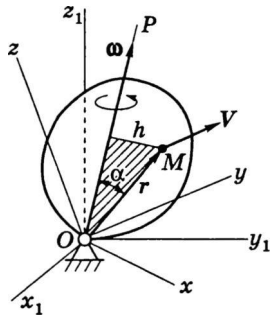


Рис. 13.3

По направлению и по размерности векторы $\omega \times r$ и V совпадают. Следовательно,

$$V = \omega \times r, \quad (13.1)$$

т.е. вектор скорости любой точки M тела равен векторному произведению угловой скорости тела на радиус-вектор этой точки.

Так как $r_x = x$, $r_y = y$, $r_z = z$, то

$$V = \omega \times r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix}. \quad (13.2)$$

Отсюда

$$\begin{cases} V_x = \omega_y z - \omega_z y, \\ V_y = \omega_z x - \omega_x z, \\ V_z = \omega_x y - \omega_y x. \end{cases} \quad (13.3)$$

Формулы (13.2) и (13.3) называют *формулами Эйлера*.

Найдем ускорение точки M . Продифференцировав равенство (13.1) по времени, получим

$$W = \frac{dV}{dt} = \left(\frac{d\omega}{dt} \times r \right) + \left(\omega \times \frac{dr}{dt} \right).$$

Так как $\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon$, а $\frac{dr}{dt} = V$, то

$$W = (\varepsilon \times r) + (\omega \times V).$$

Ускорение $W_1 = \varepsilon \times r$ называется *вращательным*, а ускорение $W_2 = \omega \times V$ — *осестремительным* ускорением точки M . Вектор W_1 направлен перпендикулярно к плоскости, проходящей через точку M и вектор ε (рис. 13.4). По модулю

$$W_1 = \varepsilon r \sin \beta = \varepsilon h_1,$$

где h_1 — расстояние от точки M до вектора ε .

Вектор W_2 , перпендикулярный одновременно к V и ω , будет направлен вдоль MC , причем по модулю

$$W_2 = \omega V \sin 90^\circ = \omega^2 h,$$

так как $V = \omega h$.

Вычислим производные от единичных векторов подвижных осей. Если трехгранник $Oxyz$ (рис. 13.5) совершает вращение вокруг какой-нибудь оси OP , то орты i, j, k не постоянные величины, так как их направления со временем будут изменяться. В этом случае для вычисления производной от какого-нибудь заданного в осях $Oxyz$ вектора $W = W_x i + W_y j + W_z k$ надо знать значения производных от ортов i, j, k . Орт i можно рассматривать как радиус-вектор $r_A = i$ точки A , лежащей на оси Ox на расстоянии единицы длины от начала O . Тогда

$$\frac{di}{dt} = \frac{dr_A}{dt} = V_A.$$

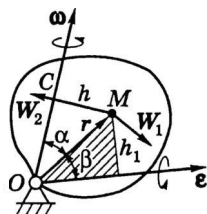


Рис. 13.4

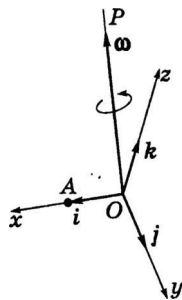


Рис. 13.5

Но $V_A = \omega \times r_A = \omega \times i$, где ω — угловая скорость поворота вокруг оси OP . Аналогичные соотношения получаются и для производных от j и k . В результате

$$\frac{di}{dt} = \omega \times i, \quad \frac{dj}{dt} = \omega \times j, \quad \frac{dk}{dt} = \omega \times k.$$

Равенства называют *формулами Пуассона*.

Задача. Пусть артиллерийский снаряд, двигаясь в атмосфере, вращается вокруг оси z с угловой скоростью ω (рис. 13.6). Одновременно ось снаряда z вращается с угловой скоростью ω_1 вокруг оси ξ , направленной по касательной к траектории центра тяжести C снаряда. Определить скорость точки M снаряда в его вращательном движении, если $CM = r$ и отрезок CM перпендикулярен оси z ; угол между осями z и ξ равен γ .

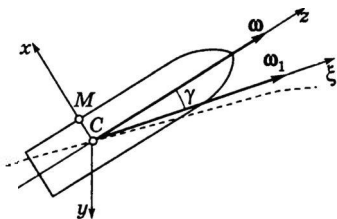


Рис. 13.6

Решение.

В данном случае скорость собственного вращения $\dot{\phi} = \omega$, скорость прецессии $\dot{\psi} = \omega_1$, угол нутации $\theta = \gamma$, а угловая скорость нутации $\dot{\theta} = 0$.

Скорость точки M в ее вращении вокруг оси z

$$V_M = \omega_z MC = (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi}) r = (\omega + \omega_1 \cos \gamma) r.$$

О т в е т: $V_M = \omega_z MC = (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi}) r = (\omega + \omega_1 \cos \gamma) r.$

13.3. Движение свободного твердого тела

Рассмотрим движение свободного твердого тела (рис. 13.7): $Ox_1y_1z_1$ — неподвижная система координат; $Ax_2y_2z_2$ — система координат, перемещающаяся поступательно относительно $Ox_1y_1z_1$; $Axyz$ — система координат, жестко связанная с телом.

Параметры, описывающие движение тела:

$$x_{1A} = x_{1A}(t), \quad y_{1A} = y_{1A}(t), \quad z_{1A} = z_{1A}(t),$$

$$\psi = \psi(t), \quad \varphi = \varphi(t), \quad \theta = \theta(t).$$

Скорость произвольной точки B

$$V_B = \frac{dr_B}{dt} = \frac{dr_A}{dt} + \frac{d\rho}{dt} = V_A + \omega \times \rho,$$

где $r_B = r_A + \rho$; V_A — скорость полюса; ω — угловая скорость вращения тела относительно системы отсчета $Ax_2y_2z_2$.

Ускорение точки B

$$W_B = \frac{dV_B}{dt} = \frac{dV_A}{dt} + \frac{d\omega}{dt} \times \rho + \omega \times \frac{d\rho}{dt} = W_A + \varepsilon \times \rho + \omega \times (\omega \times \rho).$$

Так как

$$\omega \times \rho = V, \quad \text{а } \omega \times V = \omega^2 d,$$

где d — вектор, имеющий начало в точке B , а конец — в основании перпендикуляра, опущенного из B на ω (рис. 13.8), то

$$\omega \times (\omega \times \rho) = \omega^2 d.$$

Окончательно

$$W_B = W_A + \varepsilon \times \rho + \omega^2 d.$$

Два последних слагаемых дают ускорение точки B в ее движении вокруг полюса.

Таким образом, ускорение точки свободного тела равно геометрической сумме ускорений этой точки в ее движении вокруг полюса и ускорения полюса.

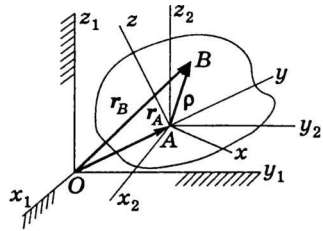


Рис. 13.7

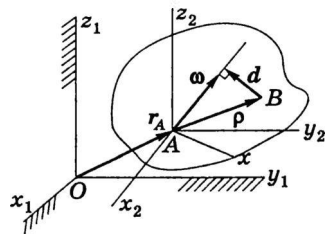


Рис. 13.8

Относительное, переносное 14.1. и абсолютное движения

При решении некоторых задач необходимо рассматривать движение точки (или тела) одновременно по отношению к двум системам отсчета, одна из которых считается неподвижной, а другая движется по отношению к первой. Движение, совершаемое при этом точкой (или телом), называется *составным* или *сложным*.

Пусть точка M перемещается по отношению к подвижной системе отсчета $Oxyz$, которая в то же время как-то движется относительно другой неподвижной системы отсчета $O_1x_1y_1z_1$ (рис. 14.1).

Движение, совершаемое точкой M по отношению к подвижным осям координат, называется *относительным движением*. Траектория AB , описываемая точкой в относительном движении, называется *относительной траекторией*. Скорость движения точки M этой кривой AB называется *относительной скоростью* (обозначается $V_{\text{отн}}$ или V_r), а ускорение точки в этом движении — *относительным ускорением* (обозначается $W_{\text{отн}}$ или W_r). При вычислении $V_{\text{отн}}$ и $W_{\text{отн}}$ оси $Oxyz$ можно считать неподвижными.

Движение, совершаемое подвижной системой отсчета $Oxyz$ и всеми неизменно связанными с ней точками пространства

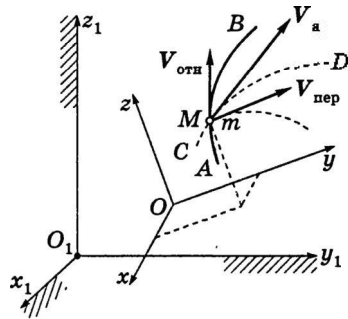


Рис. 14.1

по отношению к неподвижной системе $O_1x_1y_1z_1$, является для точки M *переносным движением*.

Скорость той неизменно связанной с подвижными осями системы $Oxuz$ точки m , с которой в данный момент совпадает движущаяся точка M , называется *переносной скоростью* точки M в этот момент (обозначается $V_{\text{пер}}$ или V_e), а ускорение этой точки — *переносным ускорением* точки M (обозначается $W_{\text{пер}}$ или W_e). Таким образом,

$$V_{\text{пер}} = V_m, \quad W_{\text{пер}} = W_m,$$

где m — неподвижная по отношению к осям $Oxuz$ точка, с которой в данный момент времени совпадает точка M .

Следовательно, точка M по отношению к неподвижной системе отсчета $O_1x_1y_1z_1$ совершает абсолютное сложное движение. Траектория CD этого движения называется *абсолютной траекторией*, скорость — *абсолютной скоростью* V_a , ускорение — *абсолютным ускорением* W_a .

Скорость и ускорение точки

14.2. В СЛОЖНОМ ДВИЖЕНИИ

При сложном движении точки ее абсолютная скорость

$$V_a = V_{\text{пер}} + V_{\text{отн}}. \quad (14.1)$$

Если угол между направлениями векторов $V_{\text{пер}}$ и $V_{\text{отн}}$ равен α , то по модулю

$$V_a = \sqrt{V_{\text{отн}}^2 + V_{\text{пер}}^2 + 2V_{\text{отн}}V_{\text{пер}}\cos\alpha}.$$

Продифференцируем по времени левую и правую части (14.1). Получим

$$W_a = \frac{dV_a}{dt} = \frac{dV_{\text{пер}}}{dt} + \frac{dV_{\text{отн}}}{dt}. \quad (14.2)$$

Вычислим стоящие справа производные, которые в общем случае не равны $W_{\text{отн}}$ и $W_{\text{пер}}$ соответственно.

Пусть положение движущейся точки M в подвижных осях системы $Oxyz$ определяется ее координатами x, y, z (рис. 14.2).

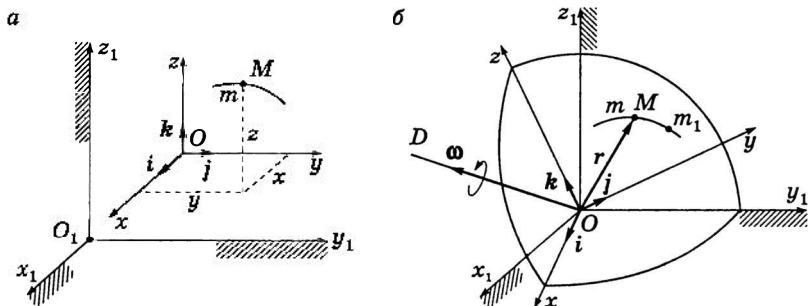


Рис. 14.2

При вычислении $V_{\text{отн}}$ и $W_{\text{отн}}$ движение подвижных осей не учитываем. Проекции векторов $V_{\text{отн}}$ и $W_{\text{отн}}$ на оси системы $Oxyz$ при любом переносном движении определяются как

$$V_{\text{отн}} = \dot{x}i + \dot{y}j + \dot{z}k, \quad W_{\text{отн}} = \ddot{x}i + \ddot{y}j + \ddot{z}k, \quad (14.3)$$

где i, j, k — единичные векторы осей системы координат $Oxyz$.

Рассмотрим сложение ускорений при *поступательном переносном движении*.

При любом положении точки M (рис. 14.2, а)

$$V_{\text{пер}} = V_O, \quad W_{\text{пер}} = W_O, \quad (14.4)$$

где V_O и W_O — скорость и ускорение начала O .

При поступательном движении осей системы $Oxyz$ их орты, перемещаясь параллельно самим себе, остаются постоянными. Тогда из равенств (14.3) и (14.4) получим

$$\frac{dV_{\text{отн}}}{dt} = \ddot{x}i + \ddot{y}j + \ddot{z}k = W_{\text{отн}}; \quad \frac{dV_{\text{пер}}}{dt} = \frac{dV_O}{dt} = W_O = W_{\text{пер}}.$$

В результате формула (14.2) дает

$$W_a = W_{\text{отн}} + W_{\text{пер}}.$$

Таким образом, при поступательном переносном движении абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме относительного и переносного ускорений.

Рассмотрим сложение ускорений при *непоступательном переносном движении*. Пусть переносное движение является вращательным с угловой скоростью ω (рис. 14.2, б). Ось OD может быть или неподвижной, или мгновенной осью вращения. В обоих случаях орты i, j, k , поворачиваясь вместе с осями системы $Oxyz$, изменяют свои направления, что в предыдущем примере при вычислении $W_{\text{отн}}$ не учитывалось. Поэтому из равенств (14.3), справедливых при любом переносном движении, имеем

$$\frac{dV_{\text{отн}}}{dt} = (\ddot{x}i + \ddot{y}j + \ddot{z}k) + \left(\dot{x} \frac{di}{dt} + \dot{y} \frac{dj}{dt} + \dot{z} \frac{dk}{dt} \right) = W_{\text{отн}} + W_1,$$

где через W_1 обозначена вторая скобка в правой части равенства.

- Вычислим W_1 с помощью формул Пуассона:

$$W_1 = \dot{x}(\omega \times i) + \dot{y}(\omega \times j) + \dot{z}(\omega \times k) = \omega \times (\dot{x}i + \dot{y}j + \dot{z}k) = \omega \times V_{\text{отн}},$$

окончательно

$$\frac{dV_{\text{отн}}}{dt} = W_{\text{отн}} + W_1, \quad (14.5)$$

где $W_1 = \omega \times V_{\text{отн}}$.

В (14.5) величина $W_{\text{отн}}$ учитывает изменение вектора $V_{\text{отн}}$ только при относительном движении точки M , а член W_1 учитывает то изменение вектора $V_{\text{отн}}$, которое происходит при его повороте вместе с трехгранником $Oxyz$ вокруг оси OD , т.е. переносном движении.

При вращательном движении скорость и ускорение любой неизменной связанной с осями системы $Oxyz$ точки m определяются как

$$V_{\text{пер}} = \omega \times r, \quad W_{\text{пер}} = (\varepsilon \times r) + (\omega \times V_{\text{пер}}),$$

где r — радиус-вектор точки m , совпадающий в данный момент времени с радиусом-вектором движущейся точки M . Тогда

$$\frac{dV_{\text{пер}}}{dt} = \left(\frac{d\omega}{dt} \times r \right) + \left(\omega \times \frac{dr}{dt} \right).$$

Производная от радиуса-вектора r даст скорость точки M в осях системы $Ox_1y_1z_1$, т.е. ее абсолютную скорость. Следовательно,

$$\frac{dr}{dt} = V_a = V_{\text{отн}} + V_{\text{пер}}.$$

С учетом того, что

$$\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon,$$

получим

$$\frac{dV_{\text{пер}}}{dt} = (\varepsilon \times r) + (\omega \times V_{\text{пер}}) + (\omega \times V_{\text{отн}})$$

или

$$\frac{dV_{\text{пер}}}{dt} = W_{\text{пер}} + W_2, \quad (14.6)$$

где $W_2 = \omega \times V_{\text{отн}}$.

Величина $W_{\text{пер}}$ учитывает изменение вектора $V_{\text{пер}}$ только в переносном движении. Слагаемое W_2 учитывает то изменение вектора $V_{\text{пер}}$, которое происходит при относительном движении точки M , так как точка M приходит из положения m в новое положение m_1 , где значение $V_{\text{пер}}$ будет уже другим.

Подставив величины (14.5) и (14.6) в равенство (14.2), получим

$$W_a = W_{\text{отн}} + W_{\text{пер}} + W_1 + W_2.$$

Введем обозначение

$$W_c = W_1 + W_2 = 2(\omega \times V_{\text{отн}}).$$

Величина W_c , характеризующая изменение вектора относительной скорости $V_{\text{отн}}$ в переносном движении и вектора переносной скорости $V_{\text{пер}}$ в относительном движении, называется *поворотным* или *кориолисовым ускорением точки*. Следовательно,

$$W_a = W_{\text{отн}} + W_{\text{пер}} + W_c.$$

Формула выражает **теорему Кориолиса**: абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме трех ускорений: относительного, характеризующего изменение относительной скорости точки в относительном движении; переносного, характеризующего изменение переносной скорости точки в переносном движении; кориолисова, характеризующего изменение относительной скорости точки в переносном движении и переносной скорости точки в относительном движении.

Если угол между векторами $V_{отн}$ и ω обозначить через α , то по модулю

$$W_c = 2|\omega V_{отн}|.$$

Вектор W_c направлен перпендикулярно к плоскости, проходящей через векторы ω и $V_{отн}$, в ту сторону, откуда кратчайшее совмещение ω и $V_{отн}$ видно происходящим против хода часовой стрелки (рис. 14.3, а).

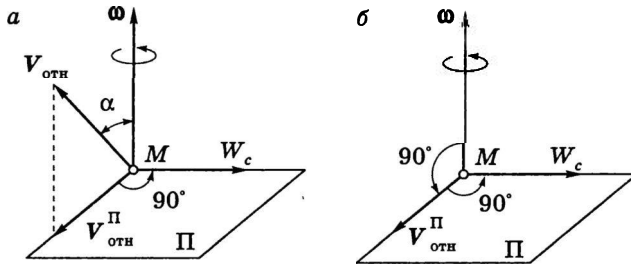


Рис. 14.3

Направление вектора W_c можно также получить, спроецировав $V_{отн}$ на плоскость Π , перпендикулярную ω , и повернув эту проекцию $V_{отн}^{\Pi}$ на 90° в сторону переносного вращения (**правило Жуковского**).

Если угол $\alpha = 90^\circ$ (рис. 14.3, б), то ускорение Кориолиса по модулю

$$W_c = 2|\omega \times V_{отн}|.$$

Кориолисово ускорение равно нулю в следующих случаях:

1) когда $\omega = 0$, т.е. переносное движение является поступательным;

2) когда $V_{\text{отн}} = 0$: относительная скорость в данный момент времени обращается в нуль;

3) когда $\alpha = 0$ или $\alpha = 180^\circ$: относительное движение происходит по направлению, параллельному оси переносного вращения, т.е. вектор $V_{\text{отн}}$ параллелен этой оси.

Часто параметры переносного движения обозначают индексом e : $V_{\text{пер}} = V_e$, $W_{\text{пер}} = W_e$, а относительного — индексом r : $V_{\text{отн}} = V_r$, $W_{\text{отн}} = W_r$.

Задача. Стержень OA колеблется в вертикальной плоскости вокруг горизонтальной оси (рис. 14.4 *a*) по закону $\varphi = \frac{\pi}{8} \sin \frac{\pi}{4} t$.

Вдоль стержня скользит ползун M , перемещаясь по закону $S = a + b \cos \frac{\pi}{4} t$. Определить абсолютное ускорение ползуна в момент $t = 1$ с, если $a = 0,5$ м, $b = 0,2$ м.

мент $t = 1$ с, если $a = 0,5$ м, $b = 0,2$ м.

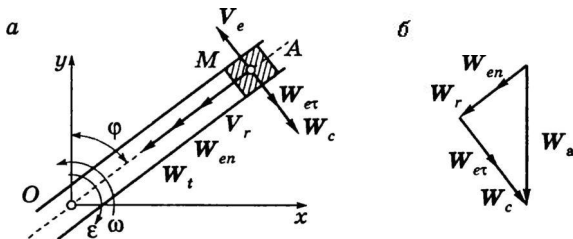


Рис. 14.4

Решение.

Движение ползуна вдоль вращающегося стержня является относительным, вращательное движение стержня для муфты — переносным.

Так как переносное движение вращательное, то абсолютное ускорение

$$W_a = W_e + W_r + W_c.$$

Определим величины этих ускорений в момент $t = 1$ с (см. рис. 14.4, *a*). Угловая скорость стержня в некотором движении

$$\omega_e = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\pi}{8} \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} t \text{ с}^{-1},$$

при $t = 1$ с

$$\omega_e = \frac{\pi}{8} \frac{\pi}{4} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi^2 \sqrt{2}}{64} \text{ с}^{-1}.$$

Угловое ускорение стержня

$$\varepsilon_e = \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\frac{\pi}{8} \frac{\pi^2}{4^2} \sin \frac{\pi}{4} t \text{ с}^{-2},$$

при $t = 1$ с

$$\varepsilon_e = -\frac{\pi}{8} \frac{\pi^2}{4^2} \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\pi^2 \sqrt{2}}{256} \text{ с}^{-2}.$$

Относительная скорость муфты направлена в каждый данный момент по стержню и равна

$$V_r = \frac{ds}{dt} = -b \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{4} t \text{ м/с},$$

при $t = 1$ с

$$V_r = -\frac{0,2\pi}{4} \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\pi\sqrt{2}}{40} \text{ м/с}.$$

Переносное ускорение W_e состоит из двух ускорений: касательного и нормального. Величина касательного ускорения

$$W_{e\tau} = OM\varepsilon_e,$$

где $OM = S = a + b \cos \frac{\pi}{4} t$,

при $t = 1$ с

$$OM = 0,5 + 0,2 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,541 \text{ м}.$$

Следовательно,

$$W_{e\tau} = 0,541\varepsilon_e = \frac{0,541\pi^2\sqrt{2}}{256} \text{ м/с}^2$$

и направлено перпендикулярно к OM в сторону, обратную направлению скорости V_e (см. рис. 14.4, а).

Величина нормального переносного ускорения

$$W_{en} = \omega_e^2 OM,$$

при $t = 1$ с

$$W_{en} = \left(\frac{\pi^2 \sqrt{2}}{64} \right)^2 = 0,541 \text{ м/с}^2$$

и направлено к центру вращения O .

Величина кориолисового ускорения

$$W_c = \frac{dV_c}{dt} = \frac{d^2 S}{dt^2} = -b \frac{\pi^2}{4^2} \cos \frac{\pi}{4} t,$$

при $t = 1$ с

$$W_c = -\frac{0,2\pi^2}{4^2} \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\pi^2 \sqrt{2}}{160} \text{ с}^{-2}$$

и направлено к центру вращения O .

Величина дополнительного ускорения

$$W_k = 2\omega_e V_r \sin \alpha, \quad (14.7)$$

где α — угол между вектором V_r и вектором ω_e .

Так как $\alpha = 90^\circ$, то $W_k = 2\omega_e V_r$.

Подставив в формулу (14.7) значения ω_e и V_r при $t = 1$ с, получим

$$W_k = 2 \frac{\pi}{8} \frac{\pi}{4} \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{0,2\pi}{4} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi^3}{640} \text{ м/с}^2.$$

Направление ускорения W_k определяем по правилу Н. Е. Жуковского.

Зная величины и направления ускорений, можно построить многоугольник, в котором замыкающей стороной будет вектор абсолютного ускорения W_a (рис. 14.4, б). Следовательно, получим треугольник.

Величина абсолютного ускорения при $t=1$ с может быть получена из равенства

$$\begin{aligned} W_a &= \sqrt{(W_{e\tau} + W_k)^2 + W_{en}^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{0,541\pi^2\sqrt{2}}{256} + \frac{\pi^3}{640}\right)^2 + \left(\frac{0,541\pi^2\sqrt{2}}{64^2}\right)^2} = \frac{8,54\pi}{640} \text{ м/с}^2. \end{aligned}$$

О т в е т: $W_a = \frac{8,54\pi}{640} \text{ м/с}^2$.

Сложение поступательных

15.1. ДВИЖЕНИЙ

Если твердое тело движется относительно подвижной системы координат $O_2x_2y_2z_2$, которая перемещается относительно основной системы координат $O_1x_1y_1z_1$, принимаемой за неподвижную, то в этом случае тело совершает сложное движение, состоящее из двух составляющих движений.

Сложное движение может состоять и из n ($n = 1, 2, 3, \dots$) составляющих движений. В этом случае рассматривается n систем координат и задается n движений:

- а) движение тела относительно системы координат $O_nx_ny_nz_n$;
- б) движение системы координат $O_nx_ny_nz_n$ относительно системы координат $O_{n-1}x_{n-1}y_{n-1}z_{n-1}$ и т.д.;
- в) движение системы координат $O_2x_2y_2z_2$ относительно системы координат $O_1x_1y_1z_1$.

Движение тела или движение какой-либо одной системы координат относительно другой в общем случае ничем не ограничено.

Рассмотрим случай, когда составляющими движениями тела являются поступательные движения. Пусть V_1 — скорость поступательного движения тела P относительно системы $O_2x_2y_2z_2$ (рис. 15.1); V_2 — скорость поступательного движения системы координат $O_2x_2y_2z_2$ относительно системы $O_1x_1y_1z_1$.

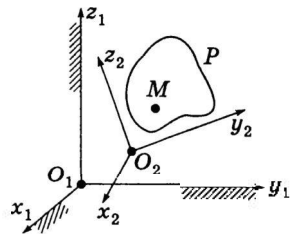


Рис. 15.1

По теореме о сложении скоростей все точки тела в абсолютном движении будут иметь одну и ту же скорость, т.е. абсолютное движение тела будет поступательным:

$$V_M = V_1 + V_2,$$

где $V_1 = V_r$, $V_2 = V_e$.

В случае n поступательных движений

$$V_M = V_1 + V_2 + \dots + V_n = \sum_{k=1}^n V_k.$$

Возможен случай, когда скорости всех точек тела только в данный момент времени оказываются равными между собой. Этот случай называют *мгновенно-поступательным* движением. Однако следует иметь в виду, что ускорения точек при этом различны.

Сложение вращений

15.2. вокруг пересекающихся осей

Рассмотрим случай, когда относительное и переменное движения тела являются вращательными. Будем определять вращение тела следующими параметрами: ω_2 — угловая скорость относительного вращения тела P в системе координат $Ox_2y_2z_2$ (рис. 15.2); ω_1 — угловая скорость переносного вращения системы координат $Ox_2y_2z_2$ в системе $Ox_1y_1z_1$.

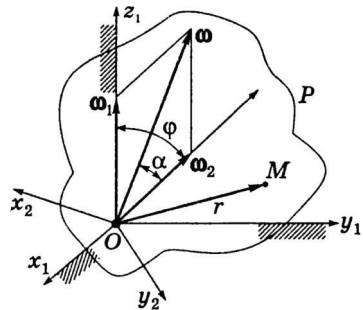


Рис. 15.2

В этом случае скорость точки O , как лежащей одновременно на обеих осях, равна нулю. Следовательно, результирующее движение тела является движением вокруг неподвижной точки O с угловой скоростью ω вокруг мгновенной оси, проходящей через точку O .

Определим угловую скорость абсолютного движения точки M тела:

$$V_r = \omega_2 \times r; \quad V_e = \omega_1 \times r;$$

$$V_M = V_r + V_e = (\omega_2 + \omega_1) \times r; \quad V_M = \omega \times r; \quad \omega = \omega_1 + \omega_2.$$

Совокупность двух вращений, происходящих вокруг пересекающихся осей, эквивалентна одному вращению, происходящему с мгновенной угловой скоростью, равной сумме угловых скоростей составляющих вращений.

В случае n вращений угловая скорость абсолютного вращения

$$\omega = \sum_{k=1}^n \omega_k.$$

Задача. Пусть карусель представляет собой круглую площадку AB (рис. 15.3), которая вращается вокруг оси OC , проходящей через ее центр D , совершая $n_r = 6$ об./мин, а ось OC вращается в том же направлении вокруг вертикали OE и делает $n_e = 10$ об./мин, угол между осями OE и OC $\alpha = 20^\circ$, диаметр площадки AB равен $d = 10$ м. Расстояние OD равно 2 м. Определить скорость V точки B в тот момент, когда она занимает самое низкое положение.

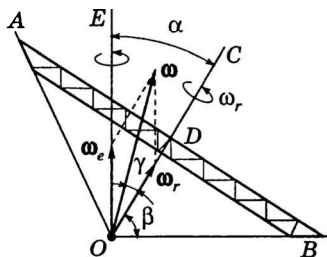


Рис. 15.3

Решение.

Угловая скорость точки B

$$V_B = \omega \cdot OB.$$

Определим угловые скорости относительного и переносного вращения:

$$\omega_r = \frac{\pi n_r}{30} = \frac{\pi}{5} = 0,628 \text{ с}^{-1}; \quad \omega_e = \frac{\pi n_e}{30} = \frac{\pi}{3} = 1,047 \text{ с}^{-1}.$$

Абсолютная угловая скорость

$$\omega = \sqrt{\omega_r^2 + \omega_e^2 + 2\omega_e\omega_r \cos(180^\circ - \alpha)} = \sqrt{\omega_r^2 + \omega_e^2 + 2\omega_e\omega_r \cos \alpha} = \\ = \sqrt{(0,628)^2 + (1,047)^2 + 2 \cdot 0,628 \cdot 1,047 \cdot 0,93969} = 1,651 \text{ с}^{-1}.$$

По теории синусов запишем отношение и найдем угол γ :

$$\frac{\omega_e}{\sin \gamma} = \frac{\omega}{\sin 160^\circ}; \quad \sin \gamma = \frac{\omega_e}{\omega} \sin 160^\circ = 0,217; \quad \gamma = 12,527.$$

$$\sin \beta = \frac{DB}{\sqrt{OD^2 + DB^2}} = \frac{5}{\sqrt{4+25}} = \frac{5}{\sqrt{29}} = 0,929; \quad \beta = 68,199.$$

Далее вычислим угол β и значение $\sin(\beta + \gamma)$:

$$\sin(\beta + \gamma) = 0,987.$$

Определим скорость точки B :

$$V_B = |\omega| |OB| \sin(\beta + \gamma) = 1,651 \cdot \sqrt{29} \cdot 0,987 = 8,77 \text{ м/с}.$$

О т в е т: $V_B = 8,77 \text{ м/с}$.

15.3. Кинематические уравнения Эйлера

Совокупность n вращений вокруг пересекающихся осей в одной точке эквивалентна одному вращению с мгновенной угловой скоростью

$$\omega = \sum_{k=1}^n \omega_k.$$

Выразим проекции ω через углы Эйлера ψ , θ , ϕ и найдем их производные по времени в случае, когда тело имеет одну неподвижную точку O .

Пусть $Oxyz$ — подвижная система координат, а $Ox_1y_1z_1$ — неподвижная (рис. 15.4, а).

Тело участвует в трех вращениях. Первое вращение вокруг оси Oz_1 с угловой скоростью $\omega_1 = \dot{\psi} k_1$ (ψ — угол прецессии);

второе вращение вокруг оси OK с угловой скоростью $\omega_2 = \dot{\theta}i'$ (θ — угол нутации); третье вращение вокруг оси Oz с угловой скоростью $\omega_3 = \dot{\phi}k$ (ϕ — угол собственного вращения).

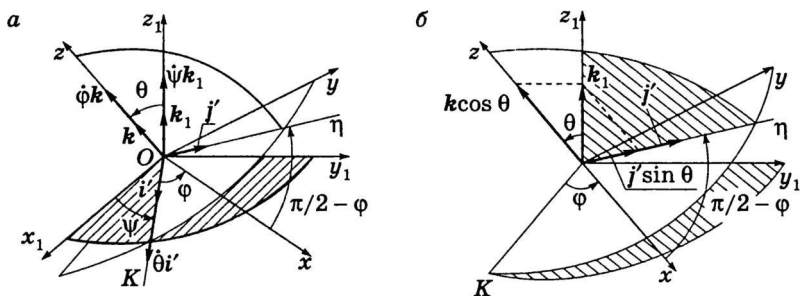


Рис. 15.4

Абсолютная угловая скорость

$$\omega = \dot{\psi}k_1 + \dot{\theta}i' + \dot{\phi}k, \quad (15.1)$$

где k_1 , i' и k — единичные векторы в системе подвижных осей координат $Oxyz$.

Представим вектор k_1 в виде двух взаимно перпендикулярных составляющих $k \cos \theta$ и $j' \sin \theta$ (рис. 15.4, б), где j' — единичный вектор вспомогательной оси η . Тогда

$$k_1 = (\cos \theta)k + (\sin \theta)j'. \quad (15.2)$$

Спроецировав (15.2) на оси x , y и z , получим выражения для направляющих косинусов:

$$\cos(k_1, x) = \sin \theta \sin \phi,$$

$$\cos(k_1, y) = \sin \theta \cos \phi,$$

$$\cos(k_1, z) = \cos \theta.$$

Направляющие косинусы единичных векторов j' и k составляются непосредственно из рис. 15.4, а.

В табл. 15.1 представлены значения направляющих косинусов единичных векторов k_1 , i' и k в системе координат $Oxyz$.

Таблица 15.1

Таблица значений направляющих косинусов

Единичный вектор	Ось x	Ось y	Ось z
k_1	$\sin \theta \sin \varphi$	$\sin \theta \sin \varphi$	$\cos \theta$
i'	$\cos \varphi$	$-\sin \varphi$	0
k	0	0	1

Спроецировав обе части равенства (15.1) на оси x , y и z , получим *кинематические уравнения Эйлера*, которые определяют проекции вектора угловой скорости тела ω на подвижные оси системы $Ox_1y_1z_1$ через углы Эйлера:

$$\begin{cases} \omega_x = \omega \cdot i = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \\ \omega_y = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \\ \omega_z = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}. \end{cases} \quad (15.3)$$

Разложим вектор k (рис. 15.5) на две составляющие, направив одну из них по оси z_1 , а вторую по оси η (вспомогательная ось), которая лежит в плоскости Ox_1y_1 , получим

$$k = (\cos \theta) k_1 + (\sin \theta) j''. \quad (15.4)$$

Спроецировав вектор k на оси x_1 , y_1 и z_1 , получим значения направляющих косинусов.

В табл. 15.2 приведены значения направляющих косинусов между единичными векторами k_1 , i' и k в системе неподвижных осей $Ox_1y_1z_1$.

Таблица 15.2

Таблица значений направляющих косинусов

Единичный вектор	Ось x_1	Ось y_1	Ось z_1
k_1	0	0	1
i'	$\cos \psi$	$\sin \psi$	0
k	$\sin \theta \sin \psi$	$-\sin \theta \cos \psi$	$\cos \theta$

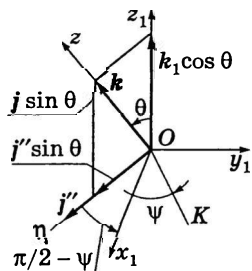


Рис. 15.5

Последняя строка табл. 15.2 получена проецированием (15.4) на неподвижные оси x_1 , y_1 и z_1 .

С учетом табл. 15.2 запишем проекции угловой скорости на неподвижные оси координат:

$$\begin{cases} \omega_{x_1} = \omega \cdot i_1 = \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi, \\ \omega_{y_1} = \omega \cdot j_1 = \dot{\theta} \sin \psi - \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi, \\ \omega_{z_1} = \omega \cdot k = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta. \end{cases} \quad (15.5)$$

Кинематические уравнения Эйлера (15.3) и (15.5) устанавливают связь между проекциями вектора угловой скорости ω на подвижные и неподвижные оси, углами Эйлера и их первыми производными.

Задача. Пусть искусственная горизонтальная площадка на качающемся корабле создается с помощью карданова подвеса (рис. 15.6, а). Ось вращения внешнего кольца y_1 параллельна продольной оси корабля; угол поворота внешнего кольца обозначается через β (угол бортовой качки). Угол поворота внутренней рамки обозначается через α . Для ориентации колец вводят три системы координат (рис. 15.6, б): система $\xi\eta\zeta$ связана с кораблем (ось ξ направлена к правому борту, ось η — к носу корабля, ось ζ — перпендикулярна к палубе); система $x_1y_1z_1$ связана с внешним кольцом (ось y_1 совпадает с осью η); система xuz связана с внутренним кольцом (ось x совпадает с осью x_1).

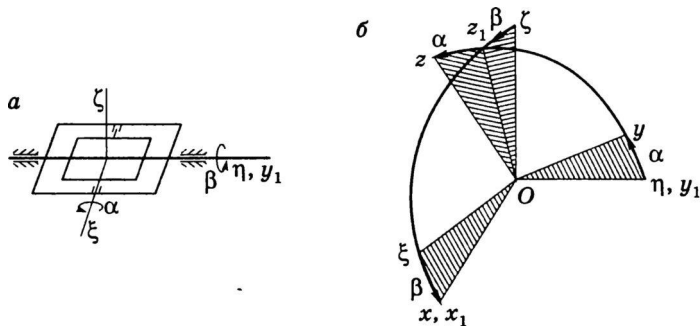


Рис. 15.6

Положительные направления отсчета углов видны из рис. 15.6, б; при $\alpha = \beta = 0$ все системы отсчета совпадают. Определить ориентацию (соответствующие направляющие косинусы) внутреннего кольца подвеса относительно корабля.

Решение.

Ориентацию внутреннего кольца подвеса относительно корабля определим посредством направляющих косинусов матричным методом. Переход от системы $O\xi\eta\zeta$ к системе координат $Oxyz$ осуществляется последовательностью двух конечных поворотов на углы β и α .

Матрицы первого и второго поворотов имеют соответственно вид

$$A_\beta = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix}, \quad A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

В результате $(\xi, \eta, \zeta)^T = A_\beta A_\alpha (x, y, z)^T$, где T — символ операции транспонирования.

$$A = A_\beta A_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\alpha \sin\beta & \cos\alpha \sin\beta \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ -\sin\beta & \sin\alpha \cos\beta & \cos\alpha \cos\beta \end{bmatrix}.$$

Так как $A^{-1} = A^T$, то

$$(x, y, z)^T = A^T (\xi, \eta, \zeta)^T,$$

$$A^T = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ \sin\alpha \sin\beta & \cos\alpha & \sin\alpha \cos\beta \\ \cos\alpha \sin\beta & -\sin\alpha & \cos\alpha \cos\beta \end{bmatrix}.$$

От в е т: запишем в виде табл. 15.3.

Таблица 15.3

Таблица косинусов углов между осями систем xyz и $\xi\eta\zeta$

Ось	ξ	η	ζ
x	$\cos\beta$	0	$-\sin\beta$
y	$\sin\alpha \sin\beta$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha \cos\beta$
z	$\cos\alpha \sin\beta$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha \cos\beta$

15.4. Пара вращений

Пусть тело совершает сложное движение, состоящее из двух вращений относительно параллельных осей O_1z_1 и O_2z_2 (рис. 15.7).

ω_2 — угловая скорость относительноного движения; ω_1 — угловая скорость переносного движения; $\omega_2 = -\omega_1$.

Найдем абсолютную скорость какой-либо точки M твердого тела. Учитывая, что $V_r = \omega_2 \times r_2$, $V_e = \omega_1 \times r_1$, запишем:

$$V_M = V_r + V_e = \omega_2 \times r_2 + \omega_1 \times r_1 = \omega_1 \times (r_1 - r_2) = \omega_1 \times O_1O_2,$$

$$V_M = -\omega_2 \times O_1O_2 = O_1O_2 \times \omega_2.$$

Векторы ω_2 и O_1O_2 не зависят от положения точки M , поэтому скорости всех точек тела одинаковы. Этим свойством обладает только поступательное движение. Векторное произведение $O_1O_2 \times \omega_2$ называется *моментом пары вращений*.

Таким образом, тело, участвующее в паре вращений, движется поступательно со скоростью, равной моменту пары вращений.

Совокупность n пар вращений эквивалентна одной паре, т.е. поступательному движению. Заметим, что любое мгновенно-поступательное движение можно представить в виде пары вращений.

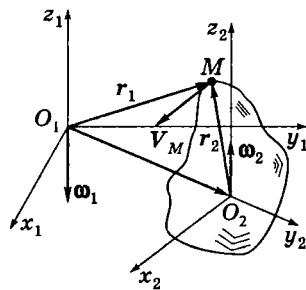


Рис. 15.7

Сложение вращений

15.5. вокруг параллельных осей

Сложение вращений вокруг параллельных осей аналогично сложению параллельных сил.

Пусть тело вращается вокруг оси O_2z_2 с угловой скоростью ω_2 относительно системы координат $O_2x_2y_2z_2$ (рис. 15.8). В свою

очередь система отсчета $O_2x_2y_2z_2$ вращается вокруг оси O_1z_1 с угловой скоростью ω_1 относительно системы координат $O_1x_1y_1z_1$. Причем $O_1z_1 \parallel O_2z_2$, $\omega_2 > \omega_1$.

Абсолютная скорость любой точки M

$$\begin{aligned} V_M &= V_r + V_e = \omega_1 \times r_1 + \omega_2 \times r_2 = \\ &= \omega_1 \times (O_1P + r') + \omega_2 \times (O_2P + r'), \end{aligned}$$

где P — мгновенный центр скоростей тела.

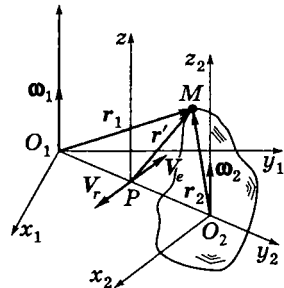


Рис. 15.8

$$V_P = \omega_2 \times O_2P + \omega_1 \times O_1P = 0.$$

С учетом данного равенства

$$V_M = \omega_1 \times r'_1 + \omega_2 \times r' = (\omega_1 + \omega_2) \times r' = \omega \times r',$$

где $\omega = \omega_1 + \omega_2$.

Для точки P векторы V_r и V_e коллинеарны, и для того чтобы $V_P = 0$, необходимо

$$\omega_1 O_1P = \omega_2 O_2P \Rightarrow \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{O_1P}{O_2P}.$$

Следовательно, совокупность двух вращений, происходящих вокруг параллельных осей, но не представляющих собой пары вращений, приводится к одному вращению, мгновенная ось которого делит внутренним или внешним образом расстояние между осями составляющих вращений на части, обратно пропорциональные модулям угловых скоростей. Угловая скорость результирующего вращения равна геометрической сумме угловых скоростей составляющих вращений.

Если угловые скорости направлены в одну сторону, то мгновенная ось вращения расположена между осями O_1z_1 и O_2z_2 и $\omega = \omega_1 + \omega_2$. В случае противоположно направленных вращений мгновенная ось расположена за осью, вокруг которой вращение происходит с большей угловой скоростью и $\omega = |\omega_1 - \omega_2|$.

Результирующая угловая скорость направлена в сторону большей из угловых скоростей.

Сложение поступательных и вращательных движений

Первый случай. Тело P движется поступательно со скоростью $V_O = \text{const}$ относительно системы $O_2x_2y_2z_2$ (рис. 15.9).

Система координат $O_2x_2y_2z_2$ вращается вокруг оси z_1 с угловой скоростью $\omega = \text{const}$, параллельной скорости V_O поступательного движения.

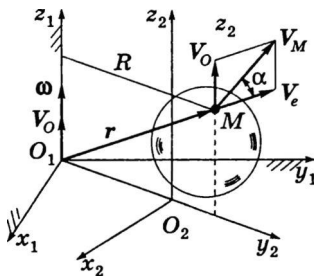


Рис. 5.9

$$V_M = V_M + \omega \times r,$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{V_r}{V_e} = \frac{V_M}{\omega R},$$

где R — радиус цилиндра, по боковой поверхности которого движется точка.

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ — время одного оборота тела в винтовом движении.

$$h = V_O T = \frac{2\pi V_O}{\omega} \text{ — шаг винта.}$$

$$p = \frac{V_O}{\omega} \text{ — параметр винта.}$$

Рассмотренное движение тела называется *кинематическим винтом*. Если V_O и ω переменны, то движение будет *мгновенно-винтовым*. Параметр винта в данном случае будет переменным.

Второй случай. $V_O \perp \omega$ (рис. 15.10).

Π — плоскость пары вращений (ω' , ω''), $\Pi \perp V_O$, $z_1 \in \Pi$.

$$d = O_1O_3 = \frac{V_O}{\omega}, \quad \omega' = -\omega, \quad V_O = O_1O_3 \times \omega''.$$

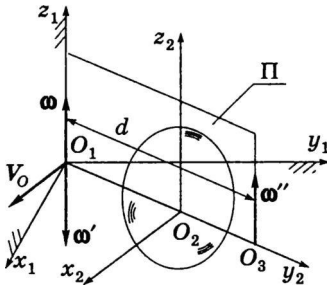


Рис. 15.10

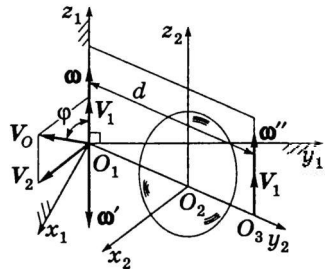


Рис. 15.11

Отсюда исходное движение $(V_O, \omega) \sim (\omega'', \omega', \omega)$.

Так как $(\omega', \omega) \sim 0$, то $(V_O, \omega) \sim \omega''$.

Следовательно, результирующее движение эквивалентно одному вращению вокруг мгновенной оси O_3 , происходящему со скоростью $\omega'' = \omega$.

Третий случай. (V_O, ω) — исходное движение (рис. 15.11).

$$V_O = V_1 + V_2,$$

где $V_1 \parallel \omega$, $V_2 \perp \omega$, $V_2 \sim (\omega', \omega')$.

Следовательно, $(V_O, \omega) \sim (V_1, V_2, \omega) \sim (V_1, \omega', \omega'', \omega) \sim (V_1, \omega')$, так как $(\omega, \omega') \sim 0$.

Таким образом, в данном случае движение приводится к мгновенно-винтовому движению вокруг оси O_3 .

$$d = \frac{V_2}{\omega} = \frac{V_O \sin \varphi}{\omega}.$$

Шаг винта при этом равен

$$h = \frac{2\pi V_O \sin \varphi}{\omega}.$$

Общий случай сложения движений твердого тела. Если тело участвует одновременно в n вращениях с угловыми скоростями $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ и в m поступательных движениях, скорости которых равны V_1, V_2, \dots, V_m (моменты пар вращений), то вся система этих движений эквивалентна совокупности одного вращательного и одного поступательного движений. Угловая

скорость результирующего вращения равна сумме (главному вектору) составляющих угловых скоростей:

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n,$$

а скорость результирующего поступательного движения равна сумме (главному моменту) моментов угловых скоростей ω_k ($k = 1 \dots n$) относительно центра приведения A и скоростей V_k поступательных движений (моментов пар вращения):

$$V_A = M_A(\omega_1) + \dots + M_A(\omega_n) + V_1 + V_2 + \dots + V_m,$$

причем ось вращения проходит через выбранный центр приведения.

Раздел
IV

**МЕХАНИКА
ЛАГРАНЖА — ГАМИЛЬТОНА**

-
16. Аналитическая механика систем материальных точек
 17. Вариационные интегральные принципы классической механики

16

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА СИСТЕМ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

Связи, классификации, число степеней свободы. Обобщенные координаты,

16.1. скорости

Повторим еще раз необходимые для дальнейшего понятия и определения (см. гл. 3). Условия, ограничивающие свободу перемещений точек механической системы, называются *связями*. В общем случае связь задается соотношением

$$f_s(r_k, V_k, t) \geq 0, \quad s = 1, 2, \dots, l. \quad (16.1)$$

Если в (16.1) реализуется только равенство, то связи называются *удерживающими (двусторонними, неосвобождающими) дифференциальными (кинематическими)*:

$$f_s(r_k, V_k, t) = 0, \quad s = 1, 2, \dots, \mu. \quad (16.2)$$

Если в (16.1) реализуется и неравенство, то связи называются *неудерживающими (односторонними, освобождающими)* и в дальнейшем не рассматриваются.

Если в (16.2) отсутствует зависимость от V_k , то связь называется *геометрической (конечной, голономной)*:

$$f_p(r_k, t) = 0, \quad p = 1, 2, \dots, \nu. \quad (16.3)$$

Если связь (16.2) путем интегрирования можно привести к виду (16.3), то связь называется *интегрируемой (голономной)*. Если связь (16.2) неинтегрируемая, то она называется *неголономной*.

Геометрические и кинематические связи называются *стационарными* или *склерономными*, если в (16.2), (16.3) f_s не зависят явно от t :

$$\begin{aligned} f_s(r_k) &= 0, \quad s=1, \dots, \nu, \\ f_s(r_k, V_k) &= 0, \quad s=1, \dots, \mu. \end{aligned}$$

Система называется *реономной*, если хоть одна из связей нестационарная, f_s явно зависит от t .

Рассмотрим несвободную систему со связями (16.2) и (16.3). В силу $l = \mu + \nu$ связей (16.2), (16.3) среди $3n$ независимых декартовых координат независимых только $3n - l$, поэтому положение системы можно задать с помощью $3n - l$ декартовых координат, а l зависимых выразить через них из уравнений (16.2) и (16.3). Однако удобно ввести $3n - l$ других независимых параметров q_1, \dots, q_{3n-l} , а декартовы координаты выразить через них:

$$r_k = r_k(q_1, \dots, q_{3n-l}, t). \quad (16.4)$$

Подставляя (16.4) в (16.2), (16.3), получаем тождества. Обобщенные скорости \dot{q}_i ($i = 1, \dots, 3n - l$) независимы и совершенно произвольны для голономной системы. Для неголономной системы обобщенные координаты, как и в голономной системе, могут принимать произвольные значения, но обобщенные скорости не будут независимы, они связаны μ соотношениями (16.2).

Число степеней свободы голономной системы совпадает с числом ее обобщенных координат. В дальнейшем будем рассматривать только голономные системы, если не оговорено иное.

16.2. Уравнения Лагранжа второго рода

Рассмотрим общее уравнение динамики для несвободной системы

$$\sum_{i=1}^n (m_i W_i - F_i) \delta r_i = 0. \quad (16.5)$$

В силу l уравнений связи и соответственно уравнений (3.22), имеющих в векторной форме вид

$$r_i = r_i(q_1, \dots, q_{3n-l}, t), \quad (16.6)$$

в (16.5) при переходе к обобщенным координатам суммирование будет вестись только по первым q_1, \dots, q_{3n-l} обобщенным координатам. Виртуальные перемещения с учетом (16.6)

$$\delta r_i = \sum_{j=1}^{3n-l} \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j, \quad i=1, \dots, n. \quad (16.7)$$

Подставив (16.7) в (16.5), получим

$$\sum_{j=1}^{3n-l} \left[\sum_{i=1}^n (m_i W_i - F_i) \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0. \quad (16.8)$$

Так как в (16.7) δq_j — независимые вариации, то получаем $3n-l$ уравнений динамики:

$$\sum_{i=1}^n (m_i W_i - F_i) \frac{\partial r_i}{\partial q_j} = 0, \quad j=1, \dots, 3n-l. \quad (16.9)$$

Преобразуем почленно выражение (16.5):

$$\sum_{i=1}^n F_i \cdot \delta r_i = \sum_{j=1}^{3n-l} \left[\sum_{i=1}^n F_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j = \sum_{j=1}^{3n-l} Q_j \delta q_j,$$

где Q_j — обобщенные силы;

$$Q_j = \sum_{i=1}^n F_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j}. \quad (16.10)$$

Теперь рассмотрим преобразования в (16.5) с учетом (16.7):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i \ddot{r}_i \delta r_i &= \sum_{j=1}^{3n-l} \left[\sum_{i=1}^n m_i \ddot{r}_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j = \\ &= \sum_{j=1}^{3n-l} \left[\sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} \left(m_i \dot{r}_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right) - m_i \dot{r}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j. \end{aligned}$$

Используя формулы

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{q}_i}, \quad \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}, \quad (16.11)$$

получим

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \delta \mathbf{r}_i &= \sum_{j=1}^{3n-l} \left[\sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} \left(m_i \mathbf{V}_i \frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - m_i \mathbf{V}_i \frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j = \\ &= \sum_{j=1}^{3n-l} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \mathbf{V}_i^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \mathbf{V}_i^2 \right] \delta q_j = \\ &= \sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j, \quad T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{V}_i^2, \end{aligned}$$

где T — кинетическая энергия.

Соотношения (16.10), (16.11) подставим в (16.8) и получим общее уравнение динамики в обобщенных $(3n-l)$ координатах q_j :

$$\sum_{j=1}^{3n-l} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right] \delta q_j = 0. \quad (16.12)$$

Так как δq_j ($j=1, \dots, 3n-l$) независимы, то из (16.12) следует

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad j=1, \dots, 3n-l. \quad (16.13)$$

Эти уравнения верны для любых обобщенных сил Q_j в случае голономных систем и называются *уравнениями Лагранжа второго рода*.

Рассмотрим случай, когда силы потенциальные:

$$\mathbf{F}_i = - \frac{\partial \Pi(\mathbf{r}_i, t)}{\partial \mathbf{r}_i}, \quad i=1, \dots, n,$$

тогда обобщенные силы

$$Q_j = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{r}_i} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}.$$

С учетом (16.5)

$$\Pi = \Pi(r_i(q_1, \dots, q_{3n-l}), t) = \Pi(q_1, \dots, q_{3n-l}, t).$$

Соответственно

$$Q_j = -\frac{\partial \Pi(q_1, \dots, q_{3n-l}, t)}{\partial q_j}.$$

Введем функцию Лагранжа

$$L = T - \Pi, \quad (16.14)$$

тогда уравнения Лагранжа (16.13) запишутся в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0. \quad (16.15)$$

Уравнения Лагранжа второго рода (16.13) или (16.15) обычно представляют собой обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка, эквивалентные уравнениям Ньютона совместно с уравнением связи для несвободных систем.

Однако в обобщенных координатах многие задачи не только для систем материальных точек, но и для твердого тела решаются эффективнее, чем в декартовых координатах.

Функция Лагранжа отличается от полной механической энергии

$$E = T + \Pi = L + 2\Pi. \quad (16.16)$$

Для стационарных потенциальных сил и стационарных связей из (16.16) и (16.15) следует закон сохранения энергии:

$$E = h = \text{const}. \quad (16.17)$$

Закон изменения полной механической энергии голономной 16.3. системы для непотенциальных сил

Пусть к системе, кроме потенциальных сил, приложены некоторые непотенциальные силы \tilde{Q}_i . Уравнения Лагранжа второго рода запишем в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + \tilde{Q}_i.$$

Рассмотрим структуру функции T в обобщенных координатах с учетом представления (16.5):

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k \dot{r}_k^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k \left(\sum_{j=1}^{3n-l} \frac{\partial r_k}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial r_k}{\partial t} \right)^2 = T_2 + T_1 + T_0,$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{3n-l} a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k, \quad T_1 = \sum_{j=1}^{3n-l} a_j \dot{q}_j, \quad T_0 = a_0,$$

$$a_{jk} = \sum_{l=1}^n m_k \frac{\partial r_l}{\partial q_j} \frac{\partial r_l}{\partial q_k}, \quad a_j = \sum_{k=1}^n m_k \frac{\partial r_k}{\partial q_j} \frac{\partial r_k}{\partial t},$$

$$a_0 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k \left(\frac{\partial r_k}{\partial t} \right)^2.$$

Склерономные системы. Для склерономной системы

$$\frac{\partial r_k}{\partial t} = 0, \quad a_j = a_0 = 0, \quad T_1 = T_0 = 0.$$

Применим теорему Эйлера об однородных функциях к (16.14). Согласно этой теореме для однородной функции $f(x_1, \dots, x_n)$ k -й степени справедливо равенство

$$\sum_{i=1}^{3n-l} \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i = kf;$$

$$\sum_{i=1}^{3n-l} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 2T_2 + T_1.$$

С учетом (16.17)

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt}(2T_2 + 2T_1 + 2T_0) - \frac{d}{dt}(T_1 + 2T_0) + \frac{d\Pi}{dt} - \frac{\partial\Pi}{\partial t} - \sum_{i=1}^{3n-l} \tilde{Q}_i \dot{q}_i + \frac{\partial T}{\partial t}.$$

Отсюда для полной энергии $E = T + \Pi$ получим

$$\frac{dE}{dt} = \tilde{N} + \frac{d}{dt}(T_1 + 2T_0) + \frac{\partial\Pi}{\partial t} - \frac{dT}{dt}, \quad (16.18)$$

$$\tilde{N} = \sum_{i=1}^{3n-l} \tilde{Q}_i \dot{q}_i.$$

Величина \tilde{N} называется *мощностью непотенциальных сил*.

Формула (16.18) выражает теорему об изменении полной механической энергии голономной системы.

1) Если система склерономная:

$$\begin{aligned} T_1 = T_0 = \frac{\partial T}{\partial t} = 0, \\ \frac{dE}{dt} = \tilde{N} + \frac{\partial\Pi}{\partial t}; \end{aligned} \quad (16.19)$$

2) если система склерономная и Π не зависит явно от времени:

$$\frac{\partial\Pi}{\partial t} = 0,$$

тогда из (16.19) следует

$$\frac{dE}{dt} = \tilde{N};$$

3) если система склерономная и все силы потенциальные:

$$\tilde{N} = 0, \quad \frac{d\Pi}{dt} = 0,$$

то такая система называется *консервативной*. Для консервативной системы

$$\frac{dE}{dt} = 0, \quad E = T + \Pi = h = \text{const.}$$

Диссипативные силы. Функция Рэлея. Непотенциальные силы называются *диссипативными*, если их мощность $\tilde{N} \leq 0$.

Тогда в случае 2 имеем $\frac{dE}{dt} \leq 0$, т.е. полная механическая энергия убывает за счет рассеяния (диссипирует) во время движения.

Пусть

$$\tilde{Q}_i = -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = -\sum_{k=1}^{3n-l} b_{ik} \dot{q}_k, \quad k=1, \dots, 3n-l,$$

где R — положительная квадратичная форма, которая называется *диссипативной функцией Рэлея*:

$$R = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{3n-l} b_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k, \quad b_{ik} = b_{ki}.$$

Для склерономной системы мощность \tilde{N} непотенциальных сил

$$\sum_{k=1}^n \tilde{F}_k \cdot V_k = \sum_{i=1}^{3n-l} \tilde{Q}_i \dot{q}_i = -2R \leq 0.$$

Таким образом, для склерономной системы с потенциалом, не зависящим явно от времени, скорость убывания полной механической энергии системы равна удвоенной функции Рэлея:

$$\frac{dE}{dt} = -2R.$$

Например, рассмотрим случай жидкого трения, когда

$$F_m = -kV_m, \quad m=1, \dots, n,$$

где k — коэффициент трения ($k > 0$).

Тогда мощность этих сил

$$\tilde{N} = \sum_{k=1}^n F_k \cdot V_k = -2R.$$

$$R = \frac{1}{2} k \sum_{k=1}^n V_k^2.$$

Гироскопические силы. Непотенциальные силы называются *гироскопическими*, если их мощность $\tilde{N} = 0$.

Из случая 3 для склерономной системы, у которой потенциальная энергия не зависит явно от времени, полная энергия сохраняется и при наличии гироскопических сил.

Пусть непотенциальные силы имеют вид

$$\tilde{Q}_i = \sum_{k=1}^{3n-l} \gamma_{ik} \dot{q}_k, \quad i = 1, \dots, 3n-l,$$

$$\gamma_{ik} = -\gamma_{ki}, \quad i, k = 1, 2, \dots, 3n-l,$$

тогда

$$\tilde{N} = \sum_{i=1}^{3n-l} \tilde{Q}_i \dot{q}_i = \sum_{i,k=1}^{3n-l} \gamma_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k = 0.$$

Обобщенный потенциал. Как следует из определения диссипативных и гироскопических сил, для них существуют производящие функции. Пусть существует функция V от обобщенных координат, обобщенных скоростей и времени такая, что обобщенные силы

$$Q_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial V}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, 3n-l.$$

Функция $V(q_i, \dot{q}_i, t)$ называется *обобщенным потенциалом*.

Если положить $L = T - V$, то уравнения Лагранжа (16.9) запишутся в форме (16.12). Функция L в этом случае имеет вид

$$L = L_2 + L_1 + L_0,$$

$$L_2 = T_2, \quad L_1 = T_1 - V_1, \quad L_0 = T_0 - V_0,$$

$$V_1 = \sum_{i=1}^{3n-l} A_i \dot{q}_i, \quad V_0 = V_0(q_i, t), \quad A_i = A_i(q_i, t).$$

16.4. Канонические уравнения Гамильтона

Как было показано в 16.2, система из n частиц и с l голономными связями имеет $3n-l$ степеней свободы, описывается $3n-l$ обобщенными координатами q_i . Каждое из уравнений Лагранжа представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка.

Можно перейти от $3n-l$ уравнений второго порядка к $2(3n-l)$ уравнениям первого порядка. Переменные $q_i(t)$, $\dot{q}_i(t)$, t будем называть *переменными Лагранжа*. Однако во многих случаях удобно ввести другие переменные: $q_i(t)$, $p_i(t)$, t , где p_i — обобщенные импульсы, вычисляемые по формуле

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (16.20)$$

Переменные q_i , p_i , t называются *переменными Гамильтона*. Пространство $2(3n-l)$ величин q_i , p_i называется *фазовым*.

Введем функцию Гамильтона

$$H(q_i, p_i, t) = \sum_{i=1}^{3n-l} p_i \dot{q}_i - L(q_j, \dot{q}_j, t). \quad (16.21)$$

Полный дифференциал левой части функции Гамильтона (16.21) имеет вид

$$dH = \sum_{i=1}^{3n-l} \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^{3n-l} \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt. \quad (16.22)$$

Полный дифференциал правой части (16.21)

$$dH = \sum_{i=1}^{3n-l} \dot{q}_i dp_i - \sum_{i=1}^{3n-l} \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (16.23)$$

Из сравнения (16.22) и (16.23) получаем

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}, \quad (16.24)$$

но

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, 3n-l,$$

согласно (16.20).

Поэтому из (16.24) получаем уравнения движения в виде

$$\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, \dots, 3n-l. \quad (16.25)$$

Уравнения (16.25) называются *уравнениями Гамильтона (каноническими уравнениями)*.

Пусть $L = L_2 + L_1 + L_0$, тогда $H = L_2 - L_0$. Если силы имеют обычный потенциал, то $H = T_2 - T_0 + \Pi$. В случае существования обобщенного потенциала $H = T_2 - T_0 + V_0$.

Для склерономной системы $T_1 = T_0 = 0$, $T = T_2$ и для обычных потенциальных сил

$$H = T + \Pi = E.$$

Таким образом, в переменных Гамильтона с помощью функции Гамильтона система обыкновенных дифференциальных уравнений динамики записывается в симметричном виде (16.25).

17

ВАРИАЦИОННЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРИНЦИПЫ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Дифференцирование и варьирование

17.1. В механике

Вариационными принципами механики называются критерии, позволяющие из множества возможных движений, совместимых с наложенными связями, выделить действительное (истинное), совершаемое под действием приложенных сил. Далее будем рассматривать лишь голономные системы.

В гл. 3 были рассмотрены дифференциальные вариационные принципы, которые дают критерий истинного движения в данный момент времени. Интегральные принципы дают критерии истинного движения за конечный интервал времени. Как было сказано в гл. 16, положение (конфигурация) системы n материальных точек в действительном евклидовом пространстве описывается радиусами-векторами $r_k = r_k(t)$, $k = 1, \dots, n$, которые зависят от t . В пространстве обобщенных координат q_1, \dots, q_{3n-l} положение (конфигурация) системы в момент времени t определяется изображающей точкой с координатами $q_1(t), q_2(t), \dots, q_{3n-l}(t)$. При изменении t изображающая точка описывает в этом пространстве траекторию.

Таким образом, между возможными положениями (конфигурациями) системы в реальном пространстве и точками конфигурационного пространства обобщенных координат существует взаимнооднозначное соответствие.

При бесконечно малых виртуальных перемещениях в действительном пространстве изображающая точка совершает виртуальные перемещения в конфигурационном пространстве.

При конечных перемещениях точек реальной системы изображающая точка совершает конечные перемещения в пространстве конфигураций (рис. 17.1, а, б).

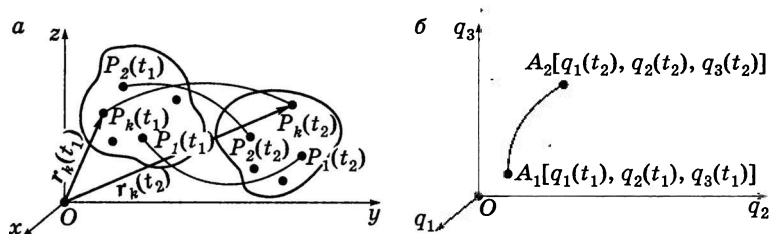


Рис. 17.1

Обобщим понятие синхронного варьирования на функции. Рассмотрим в реальном пространстве кривую $r_k(t)$, соединяющую точки $P_k(t_1)$ и $P_k(t_2)$, которые будем считать фиксированными (рис. 17.2, а). В момент времени $t_1 < t < t_2$ каждой точке кривой $P_k(t_1) \cup P_k(t_2)$ мысленно придадим виртуальное перемещение $\delta r_k(t)$.

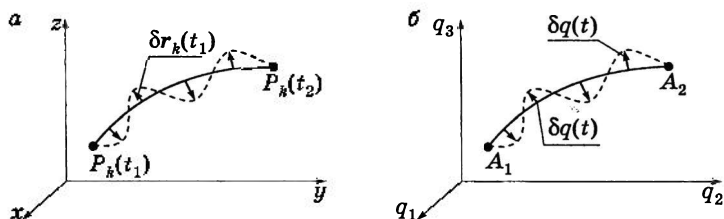


Рис. 17.2

В результате получим возможный путь движения точки из $P_k(t_1)$ в $P_k(t_2)$. Будем называть сплошную линию $P_k(t_1) \cup P_k(t_2)$ истинным путем, пунктирную линию — возможным. Очевидно, что возможных путей бесконечно много и все они бесконечно близки к действительному. В декартовых координатах положение точки на действительном пути задается радиусом-вектором $r_k(t)$, а на возможном — $r_k + \delta r_k(t)$, причем $\delta r_k(t_1) = \delta r_k(t_2) = 0$, так как точки $P_k(t_1)$ и $P_k(t_2)$ фиксированные.

Соответственно в конфигурационном пространстве обобщенных координат q_i ($i = 1, \dots, 3n - l$) действительный путь задается соотношениями

$$q_i = q_i(t), \quad q_i(t_1) = q_i^{(1)}, \quad q_i(t_2) = q_i^{(2)}.$$

Сплошная линия на рис. 17.2, б определяет истинный путь, возможные пути получаются из действительного при помощи виртуальных перемещений $\delta q_i(t)$ и задаются уравнениями

$$q_i = q_i(t) + \delta q_i(t), \quad \delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0.$$

Необходимо различать операции дифференцирования и варьирования функций. Дифференциал функции dq является результатом изменения $q(t)$ вдоль кривой $q(t)$ в зависимости от изменения аргумента t :

$$dq = q(t + \Delta t) - q(t),$$

а синхронная вариация $\delta q(t)$ функции $q(t)$ определяет мысленное изменение q при фиксированном t , связанное с переходом от данной кривой к смежной с ней кривой $\tilde{q}(t) = q(t) + \delta q(t)$.

Полной, или асинхронной, вариацией называется изменение функции, вызванное как изменением вида функции, так и изменением аргумента:

$$\Delta q = \delta q + \dot{q}\Delta t.$$

1. Операции дифференцирования и варьирования обладают свойством коммутативности:

$$\frac{d}{dt} \delta q = \delta \frac{dq}{dt}.$$

2. Операции варьирования и интегрирования с постоянными пределами коммутативны:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \varphi dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta \varphi dt.$$

3. Имеет место формула

$$\int_{t_1}^{t_2} \dot{q}_k \delta \dot{q}_k dt = - \int_{t_1}^{t_2} \ddot{q}_k \delta q_k dt$$

при $\delta q_k(t_1) = \delta q_k(t_2) = 0$.

4. Полная вариация и дифференцирование свойством коммутативности в общем случае не обладают:

$$\frac{d\Delta q}{dt} = \Delta\dot{q} + \dot{q} \frac{d\Delta t}{dt};$$

если вариация синхронная, то $\Delta t = 0$, и свойство коммутативности имеет место.

Рассмотрим кинетическую энергию системы

$$T = T(q_1, \dots, q_{3n-1}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{3n-1}, t).$$

Ее синхронная вариация $\delta T = T_d - T_v$ (T_d и T_v — соответственно действительная и возможная вариации кинетической энергии) представляет вариацию кинетической энергии в фиксированный момент времени t :

$$\delta T = \sum_{j=1}^{3n-1} \left(\frac{\partial T}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right). \quad (17.1)$$

Действительное приращение кинетической энергии при движении по действительному пути за время dt дает приращение dT . Очевидно, что dT отличается от δT .

Вариационный принцип

17.2. Гамильтона—Остроградского

Изохронное варьирование. Рассмотрим систему n материальных точек, перемещающуюся в реальном пространстве под действием приложенных сил из фиксированного положения в момент времени t_1 , в фиксированное положение в момент времени t_2 .

Для истинного движения в любой момент времени $t_1 < t < t_2$ выполняется общее уравнение динамики (принцип Даламбера — Лагранжа):

$$\sum_{k=1}^n (F_k - m_k W_k) \delta r_k = 0. \quad (17.2)$$

Интегрируем (17.2) по времени t , $t_1 \leq t \leq t_2$:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^n F_k \delta r_k dt - \sum_{k=1}^n m_k \int_{t_1}^{t_2} W_k \cdot \delta r_k dt = 0. \quad (17.3)$$

Преобразуем вычитаемое (17.3) скалярное произведение:

$$\begin{aligned} -m_k W_k \cdot \delta r_k &= -m_k \frac{dV_k}{dt} \delta r_k = -\frac{d(mV_k \cdot \delta r_k)}{dt} + \left(m_k V_k \frac{d}{dt} \delta r_k \right) = \\ &= -\frac{d(m_k V_k \delta r_k)}{dt} + m_k V_k \delta V_k. \end{aligned}$$

Тогда во втором члене (17.3) подынтегральное выражение примет вид

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n -m_k W_k \cdot \delta r_k &= -\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n m_k V_k \cdot \delta r_k + \sum_{k=1}^n m_k (V_k \cdot \delta V_k) = \\ &= -\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n m_k V_k \cdot \delta r_k + \delta \sum_{k=1}^n \frac{m_k V_k^2}{2} = -\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n m_k V_k \cdot \delta r_k + \delta T. \end{aligned}$$

Выражение под интегралом в первом члене (17.3) представляет собой элементарную работу. Поэтому (17.3) можно записать в виде

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta A + \delta T) dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n (m_k W_k \cdot \delta r_k) dt. \quad (17.4)$$

Проинтегрировав правую часть (17.4) по частям при условии, что точки траектории в моменты времени t_1 и t_2 фиксированные, т.е.

$$\delta r_k(t_1) = \delta r_k(t_2) = 0,$$

получим

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta A + \delta T) dt = 0. \quad (17.5)$$

Это уравнение выражает принцип Гамильтона — Остроградского: только для действительного движения механической

системы с голономными двусторонними идеальными связями между двумя фиксированными положениями выполняется равенство (17.5). Для всех возможных движений равенство не имеет места.

Рассмотрим принцип Гамильтона — Остроградского в потенциальном поле сил. Если силы F_k — потенциальные, то

$$\sum_{k=1}^n F_k \cdot \delta r_k = \delta A = -\delta\Pi, \quad (17.6)$$

где $\Pi(r_1, \dots, r_n, t)$ — потенциальная энергия системы.

Тогда из (17.5) $\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta\Pi) dt = 0$, для функции Лагранжа $L = T - \Pi$ имеем $\int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = 0$.

Рассмотрим интеграл $S = \int_{t_1}^{t_2} L dt$, который называется *действием по Гамильтону* и представляет собой функционал.

В реальном пространстве L является функцией $(r_1(t), \dots, r_k(t))$, а S соответственно функционалом $S[r_1(t), \dots, r_k(t)]$, в конфигурационном пространстве $L = Lq(q_1(t), \dots, q_{3n-l}(t))$, а $S[q_1(t), \dots, q_{3n-l}(t)]$.

Таким образом, для потенциальных сил принцип Гамильтона — Остроградского имеет вид $\delta S = 0$, т.е. выражает необходимое условие стационарности функционала S -действия по Гамильтону на действительном перемещении из фиксированного положения при $t = t_1$ в фиксированное положение при $t = t_2$.

Если начальное и конечное фиксированные положения системы достаточно близки, то действие по Гамильтону на прямом (истинном) пути имеет минимальное значение по сравнению с его значениями на возможных путях, проходимых за то же время. Поэтому этот принцип называется *принципом наименьшего действия*.

17.3. Вывод уравнения Лагранжа второго рода из принципа Гамильтона — Остроградского

Пусть $T = T(q_1, \dots, q_{3n-l}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{3n-l}, t)$, $\delta A = \sum_{i=1}^{3n-l} Q_i \delta q_i$, тогда с учетом (17.1) выражение (17.5) запишется в виде

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^{3n-l} \left[\frac{\partial T}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j + Q_j \delta q_j \right] dt = 0. \quad (17.7)$$

Преобразуем члены с $\delta \dot{q}_j$ интегрированием по частям с учетом того, что $\delta \dot{q}_j = \frac{d\delta q_j}{dt}$,

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} d\delta q_j = \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j dt.$$

Так как конечные положения системы фиксированные, то

$$\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right]_{t_1}^{t_2} = 0.$$

Выражение (17.7) преобразуется к виду

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^{3n-l} \left[\frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) + Q_j \right] \delta q_j dt = 0.$$

Так как δq_j независимы, то коэффициенты при них должны быть равны нулю. Таким образом получаются уравнения Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j. \quad (17.8)$$

Решения $q_j = q_j(t)$ уравнения (17.8) описывают экстремальную кривую, соединяющую начальное и конечное положения

системы в конфигурационном пространстве и представляющую собой действительный путь движения системы, на котором действие по Гамильтону имеет экстремальное (минимальное) значение.

Принцип наименьшего действия может быть положен в основу построения теоретической механики. Повторив вышеизложенный материал в обратном направлении, можно прийти к уравнениям Ньютона.

Вывод канонических уравнений механики 17.4. из принципа Гамильтона — Остроградского

Рассмотрим движение системы в поле потенциальных сил. Из функции Гамильтона

$$H = \sum_{j=1}^{3n-l} \dot{q}_j p_j - L$$

выразим

$$L = \sum_{j=1}^{3n-l} \dot{q}_j p_j - H$$

и подставим в функцию действия по Гамильтону:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{j=1}^{3n-l} \dot{q}_j p_j - H \right) dt.$$

Согласно принципу Гамильтона — Остроградского

$$\delta S = 0 \quad \text{или} \quad \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{j=1}^{3n-l} \dot{q}_j p_j \right) dt - \delta \int_{t_1}^{t_2} H dt = 0. \quad (17.9)$$

Выполним преобразования интегралов:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{j=1}^{3n-l} \dot{q}_j p_j \right) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{j=1}^{3n-l} \delta \dot{q}_j p_j + \sum_{j=1}^{3n-l} \dot{q}_j \delta p_j \right) dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^{3n-l} p_j \delta q_j dt - \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^{3n-l} \dot{p}_j \delta q_j dt + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^{3n-l} \dot{q}_j \delta p_j dt = \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^{3n-l} (\dot{q}_j \delta p_j - \dot{p}_j \delta q_j) dt, \quad (17.10)
\end{aligned}$$

в выражении учтено, что $\delta q_j(t_1) = \delta q_j(t_2) = 0$.

Вариация второго интеграла (17.9) вычисляется следующим образом:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} H dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta H dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{j=1}^{3n-l} \frac{\partial H}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial H}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right) dt. \quad (17.11)$$

Подставив (17.10), (17.11) в (17.9), получим

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{j=1}^{3n-l} \left(\dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} \dot{p}_j \right) \delta p_j - \sum_{j=1}^n \left(\dot{p}_j + \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) \delta q_j \right] dt = 0.$$

Так как δp_j и δq_j независимы, то

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \quad j=1, \dots, 3n-l. \quad (17.12)$$

Уравнения (17.12) — канонические уравнения Гамильтона.

Принцип стационарного действия

17.5. Мопертюи — Лагранжа

Изоэнергетическое варьирование. Рассмотрим голономную консервативную систему, полная энергия которой

$$H = T + \Pi = h = \text{const},$$

тогда T , Π , H не зависят явно от времени.

На рис. 17.1, б и 17.2, б представлено движение изображающей точки в конфигурационном пространстве обобщенных координат q_1, \dots, q_{3n-l} между фиксированными положе-

ниями A_1 в момент t_1 и A_2 в момент t_2 . На действительном и возможном путях, соединяющих точки A_1 и A_2 , энергия системы остается постоянной, поэтому такое варьирование называется *изоэнергетическим*. Однако время перехода $t_2 - t_1$ для действительного и возможных путей различно.

Введем действие по Лагранжу

$$W = \int_0^t 2T dt.$$

Принцип Мопертюи — Лагранжа устанавливает, что функционал действия по Лагранжу W вдоль траектории действительного движения голономной консервативной системы имеет экстремальное значение по сравнению с его значениями вдоль возможных траекторий, соединяющих фиксированные точки A и B с той же энергией.

Необходимое условие экстремума функционала действия по Лагранжу состоит в том, что его полная вариация должна быть равна нулю, т.е.

$$\delta W = \delta \int_0^t 2T dt = 0,$$

где t — переменный верхний предел.

Записав выражение для T , получим другую форму действия по Лагранжу:

$$W = \int_0^t \sum_{k=1}^n m_k V_k^2 dt = \sum_{k=1}^n \int_{k=10}^t m_k V_k^2 ds_k,$$

где s_k — расстояние вдоль действительной траектории движения k -й частицы.

Для консервативной системы действие по Лагранжу равно сумме работ количеств движения точек системы на соответствующих перемещениях. На действительных путях сумма работ количеств движения консервативной системы минимальна по сравнению с возможными путями.

Раздел

V

**ПРИМЕНЕНИЕ ОСНОВНЫХ
ЗАКОНОВ И ПРИНЦИПОВ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ**

18. Динамика твердого тела

19. Линейные колебания



ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

18.1. Понятие абсолютно твердого тела

Абсолютно твердое тело в динамике — это континуум материальных точек, расстояния между которыми в процессе движения и взаимодействия данного тела с другими телами или полями не изменяются. Масса распределена по объему тела непрерывно и в общем случае неравномерно. Континуум точек имеет бесконечное число степеней свободы, однако условие абсолютной недеформируемости тела накладывает на точки бесконечное множество связей. Континуум материальных точек может быть аппроксимирован конечным числом n точек, тогда число степеней свободы будет равным $3n$.

Для абсолютно жесткой системы (точки соединены невесомыми жесткими стержнями) необходимо наложить условия (связи), запрещающие изменение расстояний между точками:

$$|r_i - r_j| = \text{const}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Тогда число степеней свободы будет равным 18. Это означает, что положение твердого тела вполне определяется тремя точками, не лежащими на одной прямой и для расстояний между которыми выполняется записанное выше условие. Таким образом, свободное твердое тело можно описывать в рамках векторной механики как систему n материальных точек с наложенными связями или с помощью шести обобщенных координат. Описание свободного твердого тела с помощью обобщенных координат получило в аналитической динамике широкое распространение. В качестве обобщенных координат могут использоваться направляющие косинусы системы координат, жестко связанной с твердым телом, координаты центра масс и углы Эйлера или другие параметры.

Кинетический момент твердого тела.
Рассмотрим твердое тело как систему n материальных точек (рис. 18.1):

$$\begin{aligned} r_{1k} &= r_O + r_k, \\ V_{1k} &= V_O + \omega \times r_k, \\ k &= 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (18.1)$$

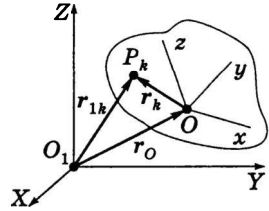


Рис. 18.1

Кинетический момент твердого тела (системы материальных точек)

$$K = \sum_{k=1}^n m_k r_{1k} \times V_{1k}. \quad (18.2)$$

Подставив (18.1) в (18.2), получим

$$\begin{aligned} K &= m r_O \times V_O + r_O \times \left[\omega \times \left(\sum_{k=1}^n m_k r_k \right) \right] + \\ &+ \left(\sum_{k=1}^n m_k r_k \right) \times V_O + \sum_{k=1}^n m_k r_k \times (\omega \times r_k). \end{aligned}$$

Рассчитаем кинетический момент свободного твердого тела. Положим, что точка O совмещена с центром масс системы:

$$r_O = r_C, \quad V_O = V_C, \quad \sum_{k=1}^n m_k r_k = 0.$$

$$K = M r_C \times V_C + \sum_{k=1}^n m_k r_k \times (\omega \times r_k) = M r_C \times V_C + K_C,$$

где K_C — кинетический момент системы относительно центра масс.

Вычислим кинетический момент тела, закрепленного в центре масс: $O = O_1 = C$.

$$r_O = V_O = 0.$$

$$K = \sum_{k=1}^n m_k r_k \times (\omega \times r_k) = K_C.$$

Расписав двойное векторное произведение по формуле

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}),$$

получим

$$\mathbf{K} = \sum_{k=1}^n m_k [\boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{r}_k) - \mathbf{r}_k \cdot (\mathbf{r}_k \cdot \boldsymbol{\omega})].$$

Проекции \mathbf{K} на оси координат могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} K_i &= \sum_{k=1}^n m_k \left[\sum_{j=1}^3 x_j^{(k)} x_j^{(k)} \omega_j \delta_{ij} - \sum_{i,j} x_i^{(k)} x_j^{(k)} \omega_j \right] = \\ &= \sum_{k=1}^n m_k \sum_{j=1}^3 (x_j^{(k)} x_j^{(k)} \delta_{ij} - x_j^{(k)} x_j^{(k)}) \omega_j, \end{aligned}$$

$$\delta_{ij} = 1, \text{ если } i = j; \quad \delta_{ij} = 0, \text{ если } i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (18.3)$$

Обозначим

$$J_{ij} = \sum_{k=1}^n m_k \left[\sum_{q=1}^3 x_q^{(k)} x_q^{(k)} \delta_{ij} - x_i^{(k)} x_j^{(k)} \right]. \quad (18.4)$$

Тогда (18.3) с учетом (18.4) можно записать в виде

$$K_i = \sum_{j=1}^n J_{ij} \omega_j, \quad J_{ij} = J_{ji}. \quad (18.5)$$

В главных осях

$$\begin{aligned} K_1 &= J_1 \omega_1, \quad K_2 = J_2 \omega_2, \quad K_3 = J_3 \omega_3, \\ J_{ij} &= 0, \quad i \neq j, \quad J_{11} = J_1, \quad J_{22} = J_2, \quad J_{33} = J_3. \end{aligned} \quad (18.6)$$

Кинетическая энергия. Вычислим кинетическую энергию твердого тела, представленного как система n материальных точек:

$$T = \sum_{k=1}^n \frac{m_k}{2} V_{1k}^2 = \sum_{k=1}^n \frac{m_k}{2} [V_O + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_k)]^2 =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=1}^n \frac{m_k}{2} V_O^2 + \sum_{k=1}^n m_k V_O \cdot (\omega \times r_k) + \sum_{k=1}^n \frac{m_k}{2} (\omega \times r_k)^2 = \\
 &= \frac{M}{2} V_O^2 + (V_O \times \omega) \sum_{k=1}^n m_k r_k + \sum_{k=1}^n \frac{m_k}{2} (\omega \times r_k)^2.
 \end{aligned}$$

Для свободного твердого тела

$$O = O_1 = C, \quad \sum_{k=1}^n m_k r_k = 0.$$

$$T = \frac{M}{2} V_C^2 + \sum_{k=1}^n \frac{m_k}{2} (\omega \times r_k)^2 = T_{\Pi} + T_{\text{в}}.$$

Для твердого тела с закрепленной точкой

$$T_{\Pi} = 0;$$

$$T = \sum_{k=1}^n \frac{m_k}{2} (\omega \times r_k)^2 = T_{\text{в}}.$$

Используя формулу

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 \mathbf{b}^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = \sum_{i,j=1}^n (a_i a_i b_j b_j - a_i b_i a_j b_j),$$

получим

$$\begin{aligned}
 T_{\text{в}} &= \sum_{k=1}^n \frac{m_k}{2} \left[\sum_{i,j=1}^3 \omega_i \omega_i x_j^{(k)} x_j^{(k)} - \omega_i x_i^{(k)} \omega_j x_j^{(k)} \right] = \\
 &= \sum_{k=1}^n \frac{m_k}{2} \sum_{i,j=1}^3 \omega_i \omega_j [x_i^{(k)} x_i^{(k)} \delta_{ij} - x_i^{(k)} x_j^{(k)}], \\
 \delta_{ij} &= \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Используя тензор инерции (18.4), получаем

$$T_{\text{в}} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 J_{ij} \omega_i \omega_j, \quad J_{ij} = J_{ji}. \quad (18.7)$$

Для системы материальных точек

$$J = \sum_{k=1}^n m_k \begin{pmatrix} y_k^2 + z_k^2 & -x_k y_k & -x_k z_k \\ -y_k x_k & x_k^2 + z_k^2 & -y_k z_k \\ -z_k x_k & -z_k y_k & x_k^2 + y_k^2 \end{pmatrix}.$$

Для континуума точек

$$J_{ij} = \int_V \rho(x_1, x_2, x_3) \left[\sum_{q=1}^3 x_q x_q \delta_{ij} - x_i x_j \right] dV,$$

где $\rho(x_1, x_2, x_3)$ — плотность твердого тела.

В главных осях имеем

$$T_{\text{вр}} = \frac{1}{2} (J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 + J_3 \omega_3^2).$$

Движение твердого тела

18.2. вокруг закрепленной точки

Пусть точка O — центр масс системы материальных точек:

$$\mathbf{r}_O = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^n m_k \mathbf{r}_k = \mathbf{r}_C.$$

Тогда согласно (18.1)

$$\ddot{\mathbf{r}}_{ik} = \ddot{\mathbf{r}}_C + \ddot{\mathbf{r}}_k.$$

Если точка O твердого тела неподвижна, то

$$\sum_{k=1}^n m_k \mathbf{r}_k = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_k \ddot{\mathbf{r}}_k = 0.$$

Закон изменения кинетического момента в данном случае имеет вид

$$\frac{d\mathbf{K}_C}{dt} = \mathbf{M}_C(\mathbf{F}_k^{(e)}). \quad (18.8)$$

Введем единичный базис e_i системы координат $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, тогда левую часть (18.8) с учетом (18.5) запишем в виде

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^3 K_i^{(C)} e_i \right) = \frac{d}{dt} \left(\sum_{ij=1}^3 J_{ij} \omega_j e_i \right) = \sum_{i,j=1}^3 J_{ij} \dot{\omega}_j e_i + \sum_{i,j=1}^3 J_{ij} \omega_j \dot{e}_i.$$

Используя формулу $\dot{e}_i = \omega \times e_i$, получаем

$$\frac{dK_C}{dt} = \sum_{i,j=1}^3 J_{ij} \dot{\omega}_j e_i + \sum_{i,j=1}^3 \omega \times J_{ij} \omega_j e_i.$$

Первое слагаемое в правой части — это локальная производная $\frac{\tilde{d}K_C}{dt}$, что позволяет записать (18.8) в виде

$$\frac{dK_C}{dt} = \frac{\tilde{d}K_C}{dt} + \omega \times K_C = M_C(F^{(e)}). \quad (18.9)$$

Выберем оси $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$ так, чтобы они являлись главными осями тензора инерции J_{ij} , тогда

$$J_{ij} = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix}, \quad K_i = J_i \omega_i.$$

Уравнение (18.9) в проекциях на главные оси координат имеет вид

$$\begin{cases} J_1 \dot{\omega}_1 - (J_2 - J_3) \omega_2 \omega_3 = M_1, \\ J_2 \dot{\omega}_2 - (J_3 - J_1) \omega_3 \omega_1 = M_2, \\ J_3 \dot{\omega}_3 - (J_1 - J_2) \omega_1 \omega_2 = M_3, \end{cases} \quad (18.10)$$

где M_i — проекции главного момента внешних сил, приложенных к телу. Уравнения (18.10) называются *динамическими уравнениями Эйлера*.

Для уравнений Эйлера можно сформулировать две основные задачи динамики: прямую и обратную. Так, вектор мгновенной угловой скорости ω можно представить в виде суммы векторов угловых скоростей углов Эйлера (рис. 18.2):

$$\omega = \omega_\varphi + \omega_\theta + \omega_\psi. \quad (18.11)$$

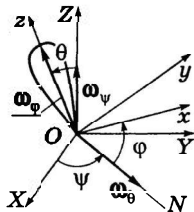


Рис. 18.2

Прямая задача состоит в том, что при заданных M_1, M_2, M_3 необходимо найти углы Эйлера как функции времени $\psi = \psi(t), \varphi = \varphi(t), \theta = \theta(t)$, определяющие положение твердого тела в момент времени t .

Обратная задача состоит в том, что для заданного закона движения $\psi = \psi(t), \varphi = \varphi(t), \theta = \theta(t)$ необходимо найти M_1, M_2, M_3 , которые, будучи приложенными к телу, реализуют заданный закон движения.

Выражение (18.11) представляет собой векторную запись *кинематических уравнений Эйлера*, которые в проекциях на оси координат имеют вид

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \cos \psi \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \sin \psi \dot{\theta} \\ \cos \theta \dot{\varphi} + \dot{\psi} \end{pmatrix}. \quad (18.12)$$

Подставив (18.12) в (18.6), получим выражение для K_C через углы Эйлера и соответственно дифференциальные уравнения (18.10) для углов Эйлера. Полученные уравнения — это нелинейные уравнения второго порядка. Подставив (18.12) в (18.7), получим выражение для T_v через углы Эйлера: $T = T(\psi, \varphi, \theta)$.

Так как углы Эйлера являются обобщенными координатами, то, применив лагранжев формализм, получим *уравнения Лагранжа второго рода* для вращения твердого тела вокруг неподвижной точки, эквивалентные динамическим уравнениям Эйлера:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = M_\varphi, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \psi} = M_\psi, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = M_\theta, \end{cases} \quad (18.13)$$

где $M_\varphi, M_\psi, M_\theta$ — главные моменты внешних сил относительно осей с единичными векторами $e_\varphi, e_\psi, e_\theta$, вдоль которых направлены угловые скорости $\omega_\varphi, \omega_\psi, \omega_\theta$.

Следовательно,

$$\omega = \dot{\varphi}e_{\varphi} + \dot{\psi}e_{\psi} + \dot{\theta}e_{\theta}. \quad (18.14)$$

Очевидно, что (18.14) — кинематические уравнения Эйлера в этих осях.

Проблемы интегрирования динамических уравнений Эйлера. Динамические (18.10) и кинематические (18.12) уравнения Эйлера представляют собой систему нелинейных дифференциальных уравнений относительно углов Эйлера $\psi(t)$, $\varphi(t)$, $\theta(t)$ как функций времени. Если реакция связи в закрепленной точке неизвестна, то необходимо определить также и ее.

Для нахождения частных решений динамических уравнений Эйлера следует поставить шесть начальных условий при $t = 0$:

$$\varphi = \varphi_0, \quad \psi = \psi_0, \quad \theta = \theta_0, \quad \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0, \quad \dot{\psi} = \dot{\psi}_0, \quad \dot{\theta} = \dot{\theta}_0. \quad (18.15)$$

При произвольных начальных условиях эта задача не решена даже тогда, когда внешними силами являются только сила тяжести самого тела и реакция закрепленной точки.

Для тяжелого твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, в трех случаях была найдена система первых интегралов дифференциальных уравнений, из которых неизвестные углы Эйлера как функции времени находятся путем интегрирования. Эти три случая называются *случаями интегрируемости уравнений Эйлера*.

1. *Случай Эйлера*: тело имеет любую форму, закреплено в центре масс, $M_x^{(e)} = M_y^{(e)} = M_z^{(e)} = 0$. Углы Эйлера вычисляются через специальные эллиптические функции.

2. *Случай Лагранжа*: тело имеет ось симметрии, например Oz , тогда $K_x = K_y$, и эллипсоид инерции для закрепленной точки будет эллипсоидом вращения. Закрепленная точка O и центр масс C расположены на оси симметрии. В этом случае находятся шесть первых независимых интегралов, из которых углы Эйлера вычисляются интегрированием.

3. *Случай Ковалевской*: $J_x = J_y = 2J_z$. Закрепленная точка располагается на оси симметрии Oz , центр масс находится в экваториальной плоскости эллипсоида инерции (плоскости Oxy) для неподвижной точки тела.

Найден ряд частных случаев начальных условий (18.15), для которых уравнения Эйлера, например при движении гироскопа под действием силы тяжести, могут быть проинтегрированы точно.

Приближенные решения уравнений Эйлера получены для некоторых случаев симметричных тел, являющихся гироскопами.

18.3. Гироскоп

Гироскоп — симметричное твердое тело, совершающее движение вокруг неподвижной точки O , расположенной на оси симметрии Oz (рис. 18.3). Эллипсоид инерции гироскопа относительно его неподвижной точки является эллипсоидом вращения (изображен штриховой линией), а любая его ось в экваториальной плоскости, перпендикулярной оси гироскопа (например, Ox и Oy), — главной осью инерции. Ось гироскопа Oz является главной центральной осью инерции.

Уравновешенный гироскоп имеет закрепление в центре масс, и на него действуют только сила тяжести P и реакция в неподвижной точке.

Если Oz — ось симметрии, то $J_x = J_y$ и $M_O^{(e)} = 0$, так как линия действия силы тяжести и реакция закрепленной точки (если нет трения) проходят через точку O (рис. 18.4).

Из закона об изменении кинетического момента для абсолютного движения гироскопа относительно неподвижных осей координат

$$\frac{dK_O}{dt} = M_O(F^{(e)}) = 0$$

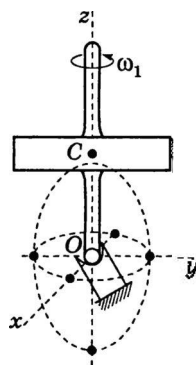


Рис. 18.3

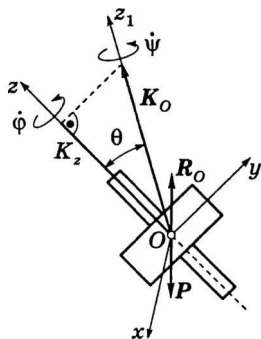


Рис. 18.4

следует, что вектор $\mathbf{K}_O = \text{const}$, в частности его модуль, является постоянной величиной. Поэтому можно одну из неподвижных осей (Oz) направлять по \mathbf{K}_O , что упрощает выкладки.

Пусть $J_1 = J_2$, тогда динамические уравнения Эйлера имеют вид

$$\begin{cases} J_1 \dot{\omega}_1 - (J_1 - J_3) \omega_2 \omega_3 = M_1, \\ J_1 \dot{\omega}_2 - (J_3 - J_1) \omega_3 \omega_1 = M_2, \\ J_3 \dot{\omega}_3 - (J_1 - J_3) \omega_2 \omega_3 = M_3. \end{cases} \quad (18.16)$$

Регулярной прецессией называется движение твердого тела около неподвижной точки, при котором тело участвует в сложном вращении с постоянными значениями угла нутации ($\theta = \theta_0$), угловой скорости собственного вращения ($\dot{\varphi}_0 = \omega_\varphi^0 = \text{const}$), угловой скорости прецессии ($\dot{\psi}_0 = \omega_\psi^0 = \text{const}$).

Рассмотрим решение обратной задачи динамики для гироскопа, т.е. определим, каким должен быть момент внешних сил \mathbf{M}_O , чтобы была возможна регулярная прецессия с заданными значениями θ_0 , $\dot{\varphi}_0$, $\dot{\psi}_0$.

Для заданных величин θ_0 , $\dot{\varphi}_0$, $\dot{\psi}_0$ кинематические уравнения Эйлера принимают вид

$$\begin{cases} \omega_1 = \omega_\psi^0 \sin \theta_0 \sin \varphi, \\ \omega_2 = \omega_\psi^0 \sin \theta_0 \cos \varphi, \\ \omega_3 = \omega_\psi^0 \cos \theta_0 + \omega_\varphi^0. \end{cases} \quad (18.17)$$

Из последнего равенства следует, что $\omega_3 = \text{const}$, и поэтому из третьего уравнения (18.16) получаем

$$M_3 = 0. \quad (18.18)$$

Подставим $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ из (18.17) в (18.16):

$$M_1 = J_1 \omega_\psi^0 \sin \theta_0 \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} + (J_3 - J_1) \omega_\psi^0 \sin \theta_0 \cos \varphi (\omega_\psi^0 \cos \theta_0 + \omega_\varphi^0).$$

Подставив вместо $\frac{d\varphi}{dt}$ значение ω_φ^0 , получим

$$M_1 = \omega_\psi^0 \omega_\varphi^0 \sin \theta_0 \cos \varphi \left[J_3 + (J_3 - J_1) \frac{\omega_\psi^0}{\omega_\varphi^0} \cos \theta_0 \right], \quad (18.19)$$

$$M_2 = \omega_\psi^0 \omega_\phi^0 \sin \theta_0 \sin \varphi \left[J_3 + (J_3 - J_1) \frac{\omega_\psi^0}{\omega_\phi^0} \cos \theta_0 \right]. \quad (18.20)$$

Так как в системе координат *Oxyz* вектор ω_ϕ имеет компоненты $(0, 0, \omega_\phi^0)$, а вектор

$$\omega_\psi = (\omega_\psi^0 \sin \theta_0 \sin \varphi, \omega_\psi^0 \sin \theta_0 \cos \varphi, \omega_\psi^0 \cos \theta_0),$$

то формулы (18.18), (18.19), (18.20) запишем в виде одного векторного равенства:

$$M_O = \omega_\psi \times \omega_\phi \left[J_3 + (J_3 - J_1) \frac{\omega_\psi^0}{\omega_\phi^0} \cos \theta_0 \right]. \quad (18.21)$$

Из формулы (18.21) следует, что M_O постоянен по модулю и параллелен линии узлов *ON*.

Формула (18.21) называется **основной формулой гироскопии**. Она позволяет по заданным моментам инерции J_1, J_3 , углу нутации θ_0 и векторам угловых скоростей $\omega_\psi^0, \omega_\phi^0$ найти момент M_O , необходимый для осуществления регулярной прецессии. Отметим, что в отличие от случая Эйлера кинетический момент K_O не остается постоянным.

Согласно теореме Резаля скорость конца вектора K_O равна M_O :

$$\frac{dK_O}{dt} = M_O.$$

Приближенная формула гироскопа. В современных гироскопах $\omega_\psi \ll \omega_\phi$, поэтому в (18.21)

$$\frac{\omega_\psi^0}{\omega_\phi^0} \ll 1,$$

следовательно, можно пренебречь вторым членом в скобках. Тогда получим приближенную формулу

$$M_O = J_3 \omega_\psi \times \omega_\phi. \quad (18.22)$$

У быстро вращающегося гироскопа в любой момент времени мгновенная угловая скорость и кинетический момент направлены по оси динамической симметрии:

$$\mathbf{K}_O = J_3 \boldsymbol{\omega}_\varphi.$$

Рассмотрим свойства быстро вращающегося гироскопа.

1. Пусть уравновешенный гироскоп вращается вокруг оси симметрии с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_\varphi$. Так как в данном случае ось симметрии является главной центральной осью инерции, то кинетический момент \mathbf{K}_O гироскопа направлен по оси симметрии, причем $\mathbf{K}_O = J_3 \boldsymbol{\omega}_\varphi$. Если $\mathbf{M}_C = 0$ относительно точки C — центра, то вектор \mathbf{K}_C постоянный, и ось гироскопа сохраняет свое начальное направление в неподвижной системе координат.

2. Пусть к оси гироскопа приложена сила \mathbf{F} , момент которой относительно точки O равен \mathbf{M} (рис. 18.5).

Согласно формуле (18.22) вектор \mathbf{K}_O , а следовательно, и ось симметрии гироскопа, так как их направления по предположению совпадают, будут отклоняться, но не в сторону действия силы, а в ту сторону, куда направлен вектор \mathbf{M} (т.е. перпендикулярно силе).

Если действие силы \mathbf{F} прекращается, то и ось гироскопа перестает отклоняться. Таким образом, в случае быстро вращающегося гироскопа отсутствует движение по инерции после прекращения действия силы.

3. При кратковременном (ударном) действии силы ось гироскопа практически сохраняет свое первоначальное положение.

4. В технике обычно на гироскоп действуют постоянные или медленно изменяющиеся моменты, которые при наличии достаточно большого кинетического момента сообщают ему весьма медленную прецессию. Это свойство гироскопа широко используется в различных приборах.

Пусть гироскоп устачовлен на теле, которое вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_\psi$, а собственная угловая скорость гироскопа

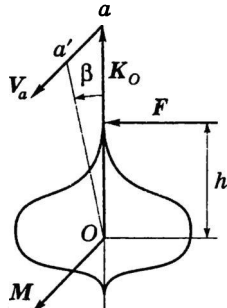


Рис. 18.5

скопа вокруг оси симметрии — ω_ϕ . Тело давит на гироскоп, за счет чего возникает момент M_O и регулярная прецессия:

$$M_O = J_3 \omega_\psi \times \omega_\phi. \quad (18.23)$$

В силу третьего закона Ньютона гироскоп давит на тело с такой же по величине, но противоположно направленной силой. Эта сила создает момент гироскопа M_Γ , действующий на тело. Очевидно, что $M_\Gamma = -M_O$. Из (18.23)

$$M_\Gamma = J_3 \omega_\phi \times \omega_\psi.$$

Это свойство гироскопа используется в системах стабилизации.

Гироскопический момент можно представить как момент гироскопической пары сил, с которой гироскоп действует на тела, вынуждающие его прецессировать под действием момента внешних сил. Обычно противодействие гироскопа в виде гироскопической пары сил передается на эти тела через подшипники, в которых помещена ось гироскопа.

$M_\Gamma = 0$, если $\omega_\psi = 0$, ось гироскопа \parallel оси прецессии.

Правило Жуковского: если быстровращающемуся гироскопу сообщить вынужденную прецессию, то возникает гироскопическая пара сил, стремящаяся сделать ось гироскопа параллельной оси прецессии, причем так, чтобы после совпадения направления этих осей оба вращения вокруг них имели одинаковое направление.

18.4 Движение твердого тела

Движение твердого тела вокруг неподвижной оси. Пусть твердое тело закреплено в точках O, O_1 (рис. 18.6), F, F_1 — реакции связи в точках O и O_1 , R — главный вектор активных сил, а M_O — главный момент этих сил относительно точки O . За обобщенную координату примем угол ϕ между осями Ox и Ox_1 .

Уравнения движения получаются из законов об изменении количества движения и момента количества движения, записанных относительно системы $Oxyz$:

$$m \frac{\tilde{d}V_C}{dt} + m\omega \times V_C = R + F + F_1, \quad (18.24)$$

$$\frac{\tilde{d}K_O}{dt} + \omega \times K_O = M_O + OO_1 \times F_1, \quad (18.25)$$

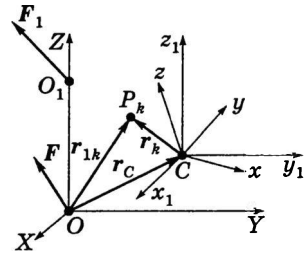


Рис. 18.6

где m — масса тела; ω — угловая скорость; V_C — скорость центра масс тела.

Реакция F не вошла в уравнение (18.25), так как ее момент относительно точки O равен нулю, \tilde{d}/dt обозначается производная в системе координат $Oxyz$.

В данном случае $\omega_1 = \omega_2 = 0$, $\omega_3 = \dot{\varphi}$, $K_x = -J_{xz}\dot{\varphi}$, $K_y = -J_{yz}\dot{\varphi}$, $K_z = J_z\dot{\varphi}$, где J_{xz} , J_{yz} — центробежные моменты; J_z — осевой момент инерции тела для точки O .

Обозначим через $h = OO_1$, учтем, что $V_C = \omega \times OC$ и спроецируем уравнения (18.24) на оси системы координат $Oxyz$:

$$\begin{cases} My_C\dot{\varphi} - Mx_C\dot{\varphi}^2 = R_x + F_x + F_{1x}, \\ Mx_C\ddot{\varphi} - My_C\dot{\varphi}^2 = R_y + F_y + F_{1y}, \\ O = R_z + F_z + F_{1z}. \end{cases} \quad (18.26)$$

$$\begin{cases} -J_{xz}\ddot{\varphi} + J_{yz}\dot{\varphi}^2 = M_x - hF_{1y}, \\ -J_{yz}\ddot{\varphi} - J_{xz}\dot{\varphi}^2 = M_y + hF_{1x}, \\ J_z\ddot{\varphi} = M_z. \end{cases} \quad (18.27)$$

Последнее уравнение в (18.27) не содержит реакций и является дифференциальным уравнением для нахождения $\varphi = \varphi(t)$, а остальные пять уравнений (18.26) и (18.27) используются для нахождения шести неизвестных реакций F_x , F_y , F_z , F_{1x} , F_{1y} , F_{1z} . Требуется решить обратную задачу, которая является неопределимой. Это вытекает из вида третьего уравнения в (18.26),

из которого следует, что можно определить лишь сумму $F_z + F_{1z}$, а не F_z , F_{1z} по отдельности.

Условия равенства динамических реакций статическим. Статические реакции находятся из (18.26) и первых двух уравнений в (18.27) при $\dot{\phi} = 0$, $\ddot{\phi} = 0$. Динамические реакции возникают при вращении, т.е. $\dot{\phi} \neq 0$, $\ddot{\phi} \neq 0$. Найдем $\phi = \phi(t)$ такие, что левые части указанных пяти уравнений равны нулю, а $\dot{\phi}$, $\ddot{\phi}$ не обращаются одновременно в нуль. Равенство левых частей дает уравнения относительно x_C , y_C , J_{xz} , J_{yz} :

$$y_C \dot{\phi} + x_C \dot{\phi}^2 = 0, \quad y_C \dot{\phi}^2 + x_C \ddot{\phi} = 0. \quad (18.28)$$

$$J_{xz} \dot{\phi} - J_{yz} \dot{\phi}^2 = 0, \quad J_{xz} \dot{\phi}^2 - J_{yz} \ddot{\phi} = 0. \quad (18.29)$$

Так как системы (18.28), (18.29) однородные и имеют определитель $\Delta = \dot{\phi}^2 + \ddot{\phi}^4 \neq 0$, то их решения имеют вид

$$x_C = y_C = 0, \quad J_{xz} = J_{yz} = 0.$$

Таким образом, динамические реакции при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси равны статическим тогда и только тогда, когда ось вращения является главной центральной осью инерции тела.

Движение свободного твердого тела. Пусть m — масса тела, V_C — скорость центра масс, K_C — кинетический момент тела в его движении относительно центра масс, в котором помещено начало координат системы $Sxyz$, жестко связанной с телом, и системы $Sx_1y_1z_1$ — кениговой системы.

На основании законов об изменении количества движения (закона движения центра масс) и изменения кинетического момента записываются дифференциальные уравнения движения в векторной форме:

$$m \frac{dV_C}{dt} = \mathbf{R}^{(e)}, \quad \frac{dK_C}{dt} = \mathbf{M}_C^{(e)}.$$

В проекциях на оси $OXYZ$

$$m \frac{d^2 X_C}{dt^2} = R_x, \quad m \frac{d^2 Y_C}{dt^2} = R_y, \quad m \frac{d^2 Z_C}{dt^2} = R_z. \quad (18.30)$$

Пусть оси C_x, C_y, C_z — главные оси инерции тела для центра масс, тогда

$$\begin{cases} J_1 \dot{\omega}_1 - (J_2 - J_3) \omega_2 \omega_3 = m_1, \\ J_2 \dot{\omega}_2 - (J_3 - J_1) \omega_3 \omega_1 = m_2, \\ J_3 \dot{\omega}_3 - (J_2 - J_1) \omega_2 \omega_1 = m_3. \end{cases} \quad (18.31)$$

Выразив $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ через углы Эйлера по кинематическим формулам Эйлера

$$\begin{cases} \omega_1 = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \\ \omega_2 = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \\ \omega_3 = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi} \end{cases} \quad (18.32)$$

и подставив (18.32) в (18.31), получим систему нелинейных дифференциальных уравнений движения второго порядка свободного твердого тела, для которой ставятся начальные условия (18.15).

Плоское движение твердого тела. Движение твердого тела называется *плоским*, если все точки тела движутся параллельно некоторой плоскости. Поместим тело так, чтобы его центр масс находился в этой плоскости. Абсолютную неподвижную систему координат $OXYZ$ расположим так, чтобы плоскость OXY совпала с данной плоскостью. Подвижную систему, жестко связанную с телом, расположим так, чтобы ее начало совпало с центром масс тела C , плоскость Cxy движется в плоскости $OXYZ$, оси xy являются главными.

В этом случае в уравнениях Эйлера

$$\omega_1 \equiv 0, \quad \omega_2 \equiv 0, \quad \omega_3 = \dot{\varphi}.$$

Плоское движение свободного твердого тела в этом случае описывается дифференциальными уравнениями, которые получаются из (18.30), (18.31):

$$M \frac{d^2 X_C}{dt^2} = R_x, \quad M \frac{d^2 Y_C}{dt^2} = R_y, \quad R_z = 0,$$

$$J_z \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = M_z.$$

Движение твердого тела по поверхности другого твердого тела. Рассмотрим более подробно понятия механики контакта, имеющей для приложений исключительно важное значение, так как в технике и природе свободное движение является скорее исключением, чем правилом.

Пусть одно твердое тело перемещается по поверхности другого. Так как тела абсолютно жесткие, то в зоне контакта деформации отсутствуют, т.е. нет искажения формы контактирующих поверхностей. Выделим в окрестности контакта участки контактирующих поверхностей, ограничивающих тела (рис. 18.7).

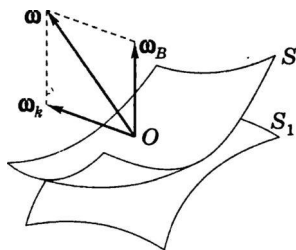


Рис. 18.7

Пусть поверхность S_1 неподвижная, а S движется по ней. Так как S_1 и S выпуклые, то касание происходит в одной точке O , через которую проходит общая плоскость — касательная к S и S_1 . Вектор скорости перемещения точки O V_O — общая касательная — лежит в касательной плоскости.

Если $V_O = 0$, то движение S по S_1 происходит без *скольжения* (качение). Если $V_O \neq 0$, то движение происходит со скольжением, а V_O называется *скоростью скольжения*.

Выберем точку O в качестве полюса поверхности S , тогда в общем случае движение S по S_1 в каждый момент времени представляет собой совокупность поступательного движения со скоростью V_O , вращения с угловой скоростью ω вокруг точки O . Направление вектора ω неизвестно. Разложим его на две взаимно ортогональные составляющие ω_B, ω_K :

$$\omega = \omega_B + \omega_K,$$

где ω_B — вектор угловой скорости вращения поверхности S вокруг ортогонали касательной плоскости; ω_K — вектор угловой скорости качения лежит в касательной плоскости.

Рассмотрим подробнее *кинматику поверхности S по S_1* .

1. При $V_O = 0$ поверхность S катится по поверхности S_1 . Если при этом $\omega_B = 0, \omega_K \neq 0$, то имеет место чистое качение S по S_1 .

Если $\omega_k = 0$, $\omega_b \neq 0$, то поверхность S совершает чистое вращение.

2. При $V_O \neq 0$, $\omega_b = 0$, $\omega_k = 0$ поверхность S скользит по поверхности S_1 со скоростью V_O .

Если $\omega_b \neq 0$, $\omega_k = 0$, то происходит скольжение с верчением.

При $\omega_b = 0$, $\omega_k \neq 0$ имеем скольжение с качением.

Когда $\omega_b \neq 0$, $\omega_k \neq 0$, то при движении S по S_1 происходит скольжение, вращение и качение.

Рассмотрим *силовое взаимодействие поверхностей S и S_1* .

1. На поверхность S действует сила N , перпендикулярная общей касательной плоскости и направленная от S_1 к S (рис. 18.8). Эта сила называется *нормальной реакцией*. Для реальных движений $N \geq 0$.

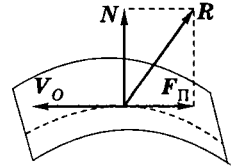


Рис. 18.8

2. На S также действует *сила трения покоя F_π* , лежащая в общей касательной плоскости. По закону Кулона имеем, что величина

$$F_\pi \leq f_0 N, \quad (18.33)$$

где f_0 — коэффициент трения покоя. Реакция связи R представляется в виде $R = N + F$.

Если $V_O = 0$, то $F_\pi < f_0 N$, и в этом случае F_π называется *силой трения покоя*. Если $V_O \neq 0$, то $F_\pi = f_0 N$ называется *силой трения скольжения*.

Поверхность S_1 абсолютно гладкая, если $f = 0$.

В реальных телах касание происходит не в одной точке, а по некоторой площадке, тогда реакция связи не сводится к одной силе R . Согласно теореме Пуансо совокупность сил, действующих на площадке контакта, приводится к силе и паре. Разложим R на N и F и представим пару в виде совокупности двух пар, одна из которых имеет момент $\parallel \omega_b$, а другая $\parallel \omega_k$. Тогда первая пара — это *пара трения верчения*, а вторая — *пара трения качения*. Обычно трение верчения и трение качения значительно меньше трения скольжения.

3. *Трение скольжения*. Сила трения скольжения определяется следующим образом:

$$F_c = -f_c N \frac{V_O}{|V_O|}, \quad f_c < f_0. \quad (18.34)$$

Законы (18.33) и (18.34) называются *законами Кулона*.

4. *Трение качения*. Сила трения определяется как

$$F_k = -f_k N \frac{V_O}{|V_O|}.$$

Динамику одного твердого тела по поверхности другого в общем случае удобно описывать с помощью уравнений Лагранжа второго рода.

Пусть внешние силы являются потенциальными, тогда существует функция Лагранжа L . Обозначив силы трения через F_j , можем вычислить обобщенные силы

$$Q_\alpha = \sum_{j=1}^n F_j \frac{\partial r_j}{\partial q_\alpha}, \quad L=1 \dots l,$$

и записать уравнения Лагранжа в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - Q_\alpha = 0. \quad (18.35)$$

Пусть существует функция диссипации $R(q_1, \dots, q_{3n-l})$ механической системы такая, что

$$Q_\alpha = -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_\alpha}. \quad (18.36)$$

Подставив (18.36) в (18.35), получим

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_\alpha} = 0.$$

Для большинства сил трения используется форма

$$F_j = -h_j(V_{jO}) \frac{V_{jO}}{|V_{jO}|}, \quad V_{jO} = |V_{jO}|, \quad j=1, \dots, n.$$

Тогда функция диссипации R имеет вид

$$R = \sum_{j=1}^n \int_0^{V_{jO}} h_j(V_{jO}) dV_{jO}.$$

18.5. Ударное взаимодействие твердых тел

Удар — это такое взаимодействие твердых тел, при котором за бесконечно малый интервал времени скорости точек тела изменяются на конечные величины по сравнению с их значениями до и после удара. Удар проявляется как почти мгновенное наложение и снятие связей.

Ударным импульсом называется векторная величина

$$S = \int_0^{\tau} F dt,$$

где τ — время ударного взаимодействия.

При решении задач об ударе используются предположения:

1) импульсами неударных сил можно пренебречь по сравнению с импульсами ударных сил;

2) перемещениями точек за время удара можно пренебречь, т.е. за время удара точки механической системы не успевают изменить своего положения, а следовательно, не изменяются радиусы-векторы точек и их координаты.

При ударных взаимодействиях выполняются основные законы механики, которые сформулируем в следующем виде.

Закон об изменении количества движения точки (рис. 18.9):

$$mV_2 - mV_1 = S.$$

Для механической системы n материальных точек разделим ударные силы на внешние и внутренние:

$$S_k = S_k^{(e)} + S_k^{(i)}.$$

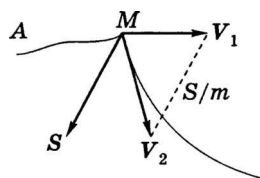


Рис. 18.9

Тогда закон об изменении количества движения системы сформулируем следующим образом: изменение количества движения системы за время удара равно векторной сумме внешних импульсов, приложенных к точкам системы:

$$Q_2 - Q_1 = \sum_{k=1}^n S_k^{(e)}. \quad (18.37)$$

Из формулы (18.37) следует закон о движении центра масс системы:

$$M(V_{2C} - V_{1C}) = \sum_{k=1}^n S_k^{(e)}.$$

Если $\sum_{k=1}^n S_k^{(e)} = 0$, то

$$Q_2 = Q_1, \quad V_{2C} = V_{1C},$$

т.е. количество движения системы и скорость центра масс не изменяются, если сумма внешних ударных импульсов, приложенных к точкам системы, равна нулю.

Рассмотрим теорему Кельвина для работы ударной силы, приложенной к точке за время удара:

$$A = \frac{1}{2} S(V_2 + V_1), \quad (18.38)$$

т.е. работа силы, приложенной к точке, равна скалярному произведению импульса силы за тот же промежуток времени на полусумму начальной и конечной скоростей точки.

Для механической системы формула (18.38) обобщается следующим образом:

$$\sum_{k=1}^n A_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n S_k(V_{k2} + V_{k1}),$$

где $S_k = S_k^{(e)} + S_k^{(i)}$ — импульс внешних и внутренних сил, действующих на k -ю точку.

Закон об изменении кинетического момента при ударе имеет вид:

для точки

$$r \times m(V_2 - V_1) = r \times S,$$

для системы точек

$$K_{O2} - K_{O1} = \sum_{k=1}^n M_O(S_k^{(e)}), \quad (18.39)$$

так как

$$K_{O2} = \sum_{k=1}^n r_k \times m_k V_{2k},$$

то

$$K_{O1} = \sum_{k=1}^n r_k \times m_k V_{1k}, \quad \sum_{k=1}^n r_k \times S_k^{(e)} = \sum_{k=1}^n M_O(S_k^{(e)}),$$

$$\sum_{k=1}^n r_k \times S_k^{(i)} = \sum_{k=1}^n r_k \times S_k^{(i)} = \sum_{k=1}^n M_O(S_k^{(i)}) = 0.$$

Таким образом, изменение кинетического момента системы относительно точки за время удара равно векторной сумме моментов относительно той же точки внешних ударных импульсов, приложенных к точкам системы.

Если удар испытывает твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси Oz , и ω_1 , ω_2 — угловые скорости до и после удара, то с учетом того, что

$$K_{z2} = J_z \omega_2, \quad K_{z1} = J_z \omega_1,$$

получаем изменение угловой скорости тела

$$J_z(\omega_2 - \omega_1) = \sum_{k=1}^n M_z(S_k^{(e)})$$

или

$$\omega_2 - \omega_1 = \sum_{k=1}^n M_z(S_k^{(e)}) / J_z. \quad (18.40)$$

В (18.40) не входят моменты ударных импульсов реакций закрепленных точек оси вращения, так как они пересекают ось вращения, если не возникают ударные импульсы сил трения в местах закрепления оси.

Если $\sum_{k=1}^n M_O(S_k^{(e)}) = 0$, то из (18.39) следует *закон сохранения*

кинетического момента:

$$K_O = K_{O1} = \text{const.}$$

Удар называется *прямым*, если скорость точки V_1 направлена по нормали к поверхности в точке удара (рис. 18.10).

Для оценки ударных свойств реальных тел введем коэффициент восстановления

$$k = \frac{|V_2|}{|V_1|} = \frac{V_2}{V_1}.$$

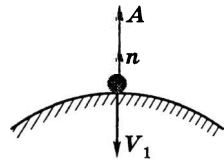


Рис. 18.10

Если $k=1$, то удар называется *абсолютно упругим*. В этом случае $V_2 = V_1$, и при ударе изменяется только направление скорости на противоположное.

Если $k=0$, то удар называется *абсолютно неупругим*. Скорость точки при таком ударе становится равной скорости поверхности, о которую ударилась точка.

При $0 < k < 1$ удар называется *упругим*.

Процесс удара точки о неподвижную поверхность разделим на фазу деформации продолжительностью τ_1 и фазу восстановления продолжительностью τ_2 . Общее время удара $\tau = \tau_1 + \tau_2$. При абсолютно неупругом ударе $\tau_2 = 0$, $\tau_1 = \tau$.

На точку при ее прямом ударе о неподвижную поверхность со стороны поверхности действует ударная сила реакции поверхности N . Она изменяется по величине в течение удара, но все время направлена по нормали к поверхности.

Для прямого удара

$$k = \frac{V_2}{V_1} = \frac{S_2}{S_1}, \quad S_1 = \int_0^{\tau_1} N dt, \quad S_2 = \int_0^{\tau_2} N dt,$$

т.е. коэффициент восстановления при прямом ударе точки о неподвижную поверхность равен отношению числовых значений ударных импульсов за вторую и первую фазы удара.

Полный ударный импульс

$$S = S_1 + S_2 = mV \left(1 + \frac{V_2}{V_1} \right) = mV(1 + k).$$

При $k=1$ $S = 2mV$, при $k=0$ $S = mV$, т.е. ударный импульс при неупругом ударе в два раза меньше ударного импульса при абсолютно упругом ударе.

Косым ударом называется не прямой удар, когда скорость точки перед ударом направлена под углом α к нормали поверхности. Угол α называется **углом падения**. Скорость V_2 после удара в общем случае составляет с нормалью к поверхности угол β , который называется **углом отражения**.

Разложим скорости до и после удара на нормальные и касательные составляющие:

$$V_2 = V_{2n} + V_{2\tau}, \quad V_1 = V_{1n} + V_{1\tau}.$$

Коэффициентом восстановления при косом ударе называется величина

$$k = \frac{|V_{2n}|}{|V_{1n}|} = \frac{V_{2n}}{V_{1n}}.$$

Применив закон об изменении количества движения в проекции на нормаль к поверхности, получим

$$k = \frac{V_{2n}}{V_{1n}} = \frac{S_{2n}}{S_{1n}},$$

где S_{2n} , S_{1n} — проекции ударных импульсов на нормаль к поверхности за первую и вторую фазы удара.

В случае не идеально гладкой поверхности $V_{2\tau} < V_{1\tau}$. Если поверхность не обладает ударным трением, то $V_{2\tau} = V_{1\tau}$ и

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{V_{2\tau}}{V_{2n}} = \frac{V_{1\tau}}{V_{2n}}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{V_{1\tau}}{V_{1n}}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{k} \operatorname{tg} \alpha.$$

Из эксперимента по падению шарика с высоты h_1 на поверхность и его отскока на высоту h_2 получаем

$$k = \frac{V_2}{V_1} = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}.$$

Эксперименты показывают, что величина h_2 при заданном h_1 зависит от свойств материала и других факторов.

Закон изменения кинетической энергии при ударе формулируется в виде теоремы Карно для абсолютно неупругого удара.

Рассмотрим теорему для точки. Согласно закону об изменении количества движения

$$mV_2 - mV_1 = S. \quad (18.41)$$

При отсутствии ударного трения ударный импульс направлен по нормали к поверхности. Скорость V_2 направлена по касательной, т.е. $V_{2n} = 0$; $S \perp V_2$, $S \cdot V_2 = 0$. Умножив (18.41) скалярно на V_2 , получим

$$-mV_1 \cdot V_2 + mV_2^2 = 0. \quad (18.42)$$

Кинетическая энергия точки при абсолютно неупругом ударе уменьшится на величину

$$\frac{mV_1^2}{2} - \frac{mV_2^2}{2}.$$

Прибавив это выражение к (18.42), получим

$$\begin{aligned} \frac{mV_1^2}{2} - \frac{mV_2^2}{2} &= \frac{mV_1^2}{2} - \frac{mV_2^2}{2} + (-mV_1 \cdot V_2 + mV_2^2) = \\ &= \frac{mV_1^2}{2} + \frac{mV_2^2}{2} - mV_1 \cdot V_2 = \frac{m}{2}(V_1 - V_2)^2. \end{aligned}$$

Величина $V_1 - V_2$ называется *потерянной скоростью*.

Теорема Карно формулируется следующим образом: потеря кинетической энергии точки при абсолютно неупругом ударе и отсутствии ударного трения в случае мгновенного наложения связей равна кинетической энергии от потерянной скорости.

В случае системы необходимо для каждой точки считать, что связи для точек системы, испытывающих удар, создают ударные импульсы S_k , перпендикулярные скоростям точек после удара V_{2k} , т.е. $S_k \cdot V_{2k} = 0$. Однако условия

$$\sum_{k=1}^n S_k \cdot V_{2k} = 0$$

достаточно для того, чтобы имела место **теорема Карно**: потеря кинетической энергии при абсолютно неупругом ударе в случае

мгновенного наложения связей и отсутствия ударного трения равна кинетической энергии от потерянных скоростей точек системы:

$$T_1 - T_2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k (V_{1k} - V_{2k})^2,$$

$$T_1 = \sum_{k=1}^n \frac{m_k V_{1k}^2}{2}, \quad T_2 = \sum_{k=1}^n \frac{m_k V_{2k}^2}{2}.$$

Теорему Карно можно сформулировать для точки и системы в случае удара, который возникает при мгновенном снятии связей. При этом кинетическая энергия после удара больше кинетической энергии удара:

$$T - T_0 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k (V_{k1} - V_{k2})^2.$$

Применение основных законов

18.6. механики удара

Удар двух тел. Пусть два тела 1 и 2 массами m_1 и m_2 до и после удара движутся поступательно, ударное трение отсутствует (рис. 18.11).

Центральным называется удар, при котором линия удара направлена по общей нормали в точке касания поверхностей. Согласно закону об изменении количества движения для тел 1 и 2

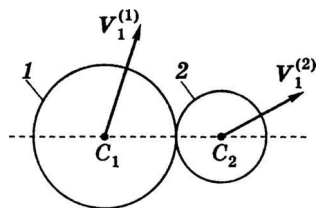


Рис. 18.11

$$m_1 V_2^{(1)} - m_1 V_1^{(1)} = S^{(1)}, \quad m_2 V_2^{(2)} - m_2 V_1^{(2)} = S^{(2)}. \quad (18.43)$$

При ударе двух тел $S_1 = -S_2$, и из (18.43) следует

$$m_1 V_2^{(1)} + m_2 V_2^{(2)} = m_1 V_1^{(1)} + m_2 V_1^{(2)} = S^{(2)}, \quad (18.44)$$

т.е. количество движения при ударе двух тел не изменяется.

Если удар абсолютно неупругий, то скорости тел после удара одинаковы и равны V_2 , тогда из (18.44)

$$V_2 = \frac{m_1 V_1^{(1)} + m_2 V_1^{(2)}}{m_1 + m_2}. \quad (18.45)$$

При прямом ударе двух тел их скорости $V_1^{(1)}$ и $V_1^{(2)}$ до удара направлены по линии удара. Тогда из (18.45), спроецировав $V_1^{(1)}$ и $V_2^{(2)}$ на линию удара, получим

$$V_2 = \frac{m_1 V_1^{(1)} + m_2 V_1^{(2)}}{m_1 + m_2},$$

где V_2 , $V_1^{(1)}$, $V_1^{(2)}$ — алгебраические значения скоростей. Для того чтобы удар произошел, скорости тел $V_1^{(1)}$, $V_1^{(2)}$ должны быть направлены в одну и ту же сторону, а их числовые значения — удовлетворять условию $V_1^{(1)} > V_1^{(2)}$.

Для прямого центрального удара двух тел к каждому телу для первой и второй фаз применим теорему об изменении количества движения в проекции на ось Ox , направленную по линии удара (рис. 18.12).

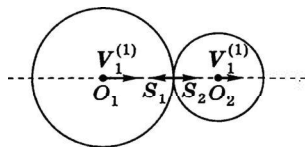


Рис. 18.12

Тогда

$$\begin{cases} m_1 V_2 - m_1 V_1^{(1)} = -S'_1, \\ m_1 V_2^{(1)} - m_1 V_2 = -S''_1, \\ m_2 V_2 - m_2 V_1^{(2)} = -S'_2, \\ m_2 V_2^{(2)} - m_2 V_2 = S''_2, \\ S'_1 = S'_2, \quad S''_1 = S''_2, \end{cases} \quad (18.46)$$

где V_2 — общая скорость тел в конце первой фазы; $S'_1 = S'_2$ и $S''_1 = S''_2$ — ударные импульсы соответственно за первую и вторую фазы удара.

К уравнениям (18.46) следует присоединить выражение для коэффициента восстановления через ударные импульсы. Следовательно,

$$k = S''_1 / S'_1 = S''_2 / S'_2. \quad (18.47)$$

Выражения (18.46) и (18.47) образуют систему из семи алгебраических уравнений для семи неизвестных $V_2, V_2^{(1)}, V_2^{(2)}, S_1', S_2', S_1'', S_2''$ при известных доударных скоростях $V_1^{(1)}, V_1^{(2)}$ и коэффициенте восстановления k .

Из уравнений (18.46), (18.47)

$$k = -\frac{V_2^{(1)} - V_2^{(2)}}{V_1^{(1)} - V_1^{(2)}},$$

$$V_2^{(1)} - V_1^{(1)} = -(1+k) \frac{m_2}{m_1+m_2} (V_1^{(1)} - V_1^{(2)}),$$

$$V_2^{(2)} - V_1^{(2)} = (1+k) \frac{m_1}{m_1+m_2} (V_1^{(1)} - V_1^{(2)}).$$

Используя формулы (18.46), (18.47), находим

$$\begin{aligned} T_1 - T_2 &= \left(\frac{m_1 V_1^{(1)2}}{2} + \frac{m_2 V_1^{(2)2}}{2} \right) - \left(\frac{m_1 V_2^{(1)2}}{2} + \frac{m_2 V_2^{(1)2}}{2} \right) = \\ &= \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (1 - k^2) (V_1^{(1)} - V_1^{(2)})^2. \end{aligned}$$

При абсолютно упругом ударе двух тел $k=1$ и $T_1 = T_2$.

При абсолютно неупругом ударе ($k=0$)

$$\begin{aligned} T_1 - T_2 &= \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (V_1^{(1)} - V_1^{(2)})^2 = \\ &= \frac{m_1}{2} (V_1^{(1)} - V_2)^2 + \frac{m_2}{2} (V_1^{(2)} - V_2)^2. \end{aligned} \quad (18.48)$$

При абсолютно неупругом ударе двух поступательно движущихся тел для каждого тела налагаемая связь не является стационарной, условия $S_1 \cdot V_2 = 0$ и $S_2 \cdot V_2 = 0$ по отдельности не выполняются, но выполняется условие для двух тел:

$$S \cdot V_2 = S_1 \cdot V_2 + S_2 \cdot V_2 = (S_1 + S_2) \cdot V_2 = 0.$$

Так как

$$S = S_1 + S_2 = 0,$$

то теорема Карно остается справедливой.

Из теоремы Карно в виде (18.48) можно получить общую скорость тел после удара при прямом центральном ударе этих тел:

$$V_2 = \frac{m_1 V_1^{(1)} + m_2 V_1^{(2)}}{m_1 + m_2}.$$

Рассмотрим частные случаи.

1. Пусть $V_1^{(2)} = 0$, тогда,

$$T_1 = m_1 V_1^{(1)2} / 2,$$

$$V_2 = m_1 V_1^{(1)} / (m_1 + m_2),$$

$$T_2 = (m_1 + m_2) \frac{V_2^2}{2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \frac{m_1 V_1^{(1)2}}{2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} T_1,$$

$$T_1 - T_2 = \left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) T_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} T_1. \quad (18.49)$$

Если $m_2 \gg m_1$, то, полагая

$$\frac{m_2}{m_1 + m_2} \approx 1$$

в (18.49), имеем

$$T_1 - T_2 \approx T_1.$$

Таким образом, почти вся энергия затрачивается на деформацию тел.

Если применить эту теорию дляковки, то

$$T_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} T_1 \approx 0, \quad m_1 \ll m_2,$$

т.е. на преодоление сопротивления энергия не тратится.

2. Если $m_1 \gg m_2$, то для потери кинетической энергии на сам удар вследствие $m_2 / (m_1 + m_2) \approx 0$

$$T_1 - T_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} T_1 \approx 0.$$

В этом случае потери энергии на деформацию почти нет, вся первоначальная энергия тратится на преодоление сопротивления движению тел после удара, так как

$$T_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} T_1 \approx T_1.$$

Такая ситуация имеет место при забивке свай, гвоздей и т.п.

Удар двух вращающихся тел.

Рассмотрим два тела, вращающихся вокруг одной оси (рис. 18.13). Угловые скорости тел ω_1 , ω_2 , моменты инерции J_1 , J_2 записываем относительно оси вращения. При ударном сближении тел они взаимодействуют выступами абсолютно неупруго. Так как $S = S_1 + S_2 = 0$, то $S \cdot V_2 = 0$, $S_1 \cdot V_2 \neq 0$, $S_2 \cdot V_2 \neq 0$ — выполняются условия теоремы Карно, согласно которой

$$\frac{J_1 \omega_1^2}{2} + \frac{J_2 \omega_2^2}{2} - (J_1 + J_2) \frac{\omega^2}{2} = \frac{J_1}{2} (\omega_1 - \omega)^2 + \frac{J_2}{2} (\omega_2 - \omega)^2, \quad (18.50)$$

где ω — общая угловая скорость тел после удара; $\omega_1 - \omega$ и $\omega_2 - \omega$ — потерянные угловые скорости тел. Из (18.50)

$$\omega = \frac{J_1 \omega_1 + J_2 \omega_2}{J_1 + J_2}. \quad (18.51)$$

В случае, когда тела до удара вращаются в противоположных направлениях, то в (18.51) следует брать алгебраические значения угловых скоростей тел.

Удар по телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси. Центр удара. Рассмотрим твердое тело, которое вращается вокруг неподвижной оси (рис. 18.14) с угловой скоростью ω_1 . К телу прикладывается ударный им-

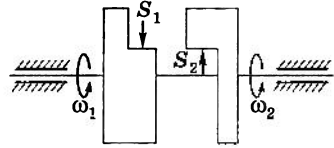


Рис. 18.13

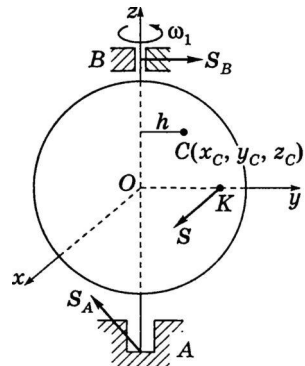


Рис. 18.14

пульс S , в результате чего изменяется угловая скорость и становится равной ω_2 .

Получим условия, при которых в результате удара не возникает ударных реакций в подшипниках A и B оси вращения.

Освободим тело от связей и заменим их импульсами реакций S_A и S_B . Запишем законы об изменении количества движения и кинетического момента:

$$Q_2 - Q_1 = \sum_{k=1}^n S_k^{(e)} = S + S_A + S_B,$$

$$K_2 - K_1 = \sum_{k=1}^n M_O(S_k^{(e)}) = M_O(S) + M_O(S_A) + M_O(S_B). \quad (18.52)$$

Вычислив скорости точек тела при вращении по формуле Эйлера $V_k = \omega \times r_k$, запишем

$$Q_2 = MV_C = M(\omega \times r_C),$$

где r_C — радиус-вектор центра масс C . Так как векторы ω_2, ω_1 направлены по оси вращения, то

$$Q_2 = Q_1 = M \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \omega_2 - \omega_1 \\ x_C & y_C & z_C \end{vmatrix} =$$

$$= M \{ i [-y_C(\omega_2 - \omega_1)] + j [x_C(\omega_2 - \omega_1)] + k \cdot 0 \}. \quad (18.53)$$

Проекция кинетического момента на оси координат определим по формулам для тела, имеющего одну закрепленную точку при условии, что $\omega_x = \omega_y = 0$, $\omega_z = \omega_1$. Тогда

$$K_x = J_x \omega_x - J_{xy} \omega_y - J_{xz} \omega_z = -J_{xz} \omega_z = -J_{xz} \omega,$$

$$K_y = -J_{yx} \omega_x + J_y \omega_y - J_{yz} \omega_z = -J_{yz} \omega_z = -J_{yz} \omega,$$

$$K_z = -J_{zx} \omega_x - J_{zy} \omega_y + J_z \omega_z = J_z \omega_z = +J_z \omega.$$

Используя эти формулы для записи K_2, K_1 и подставив в (18.52), получим

$$\begin{cases} K_{2x} - K_{1x} = -J_{xz}(\omega_2 - \omega_1), \\ K_{2y} - K_{1y} = -J_{yz}(\omega_2 - \omega_1), \\ K_{2z} - K_{1z} = -J_z(\omega_2 - \omega_1). \end{cases} \quad (18.54)$$

Спроецировав (18.52) на оси координат с учетом (18.53), (18.54), получим

$$\begin{cases} -My_C(\omega_2 - \omega_1) = S_x + S_{Ax} + S_{Bx}, \\ Mx_C(\omega_2 - \omega_1) = S_y + S_{Ay} + S_{By}, \\ O = S_z + S_{Az}, \\ -J_{xz}(\omega_2 - \omega_1) = M_x(S) + M_x(S_A) + M_x(S_B), \\ -J_{yz}(\omega_2 - \omega_1) = M_y(S) + M_y(S_A) + M_y(S_B), \\ J_z(\omega_2 - \omega_1) = M_z(S) + M_z(S_A) + M_z(S_B). \end{cases} \quad (18.55)$$

В (18.55) имеем шесть уравнений и шесть неизвестных: S_{Ax} , S_{Bx} , S_{Ay} , S_{By} , S_{Az} , $\omega_2 - \omega_1$.

Найдем условия, при которых заданный ударный импульс S не вызывает ударных реакций в подшипниках A и B , т.е. $S_A = S_B = 0$.

Из (18.55) в этом случае получаем

$$\begin{cases} -My_C(\omega_2 - \omega_1) = S_x, \\ Mx_C(\omega_2 - \omega_1) = S_y, \\ O = S_z, \\ -J_{xz}(\omega_2 - \omega_1) = M_x(S) \\ -J_{yz}(\omega_2 - \omega_1) = M_y(S), \\ J_z(\omega_2 - \omega_1) = M_z(S). \end{cases} \quad (18.56)$$

Так как S_z должно быть равным нулю, то вектор ударного импульса S должен находиться в плоскости \parallel плоскости Oxy . Поместим начало координат O на оси вращения так, чтобы вектор импульса S лежал в плоскости Oxy и ось x направим параллельно S . Тогда линия действия вектора пересекается с осью y в точке K и $S_y = 0$, $S_x = S$, $M_x(S) = 0$, $M_y(S) = 0$ ($S \parallel Ox$ и пересекает Oy). Подставив значения S , $M(S)$ в (18.56), получим

$$\begin{cases} -My_C(\omega_2 - \omega_1) = S, \\ Mx_C(\omega_2 - \omega_1) = 0, \\ -J_{xz}(\omega_2 - \omega_1) = 0, \\ -J_{yz}(\omega_2 - \omega_1) = 0, \\ J_z(\omega_2 - \omega_1) = M_z(S). \end{cases} \quad (18.57)$$

Из (18.57) находим $x_C = 0$, $J_{xz} = 0$, $J_{yz} = 0$, т.е. центр масс находится в плоскости Oxy и ось вращения Oz является главной осью инерции для точки O . Так как $S \parallel Ox$, то $S \perp Oyz$.

Обозначим $OK = l$, тогда $M_z(S) = -lS$, если S направлен в положительную сторону оси Ox . Из первого и последнего уравнений (18.57) находим

$$l = \frac{J_z}{My_C}.$$

Точка пересечения K линии действия ударного импульса с плоскостью, проходящей через ось вращения и центр масс, при отсутствии ударных реакций в подшипниках называется *центром удара*.

Если центр масс находится на оси вращения, то $y_C = 0$, а $l = \infty$: центра удара не существует. Действительно, в этом случае $V_{C2} = V_{C1} = 0$, $Q_2 - Q_1 = M(V_{C2} - V_{C1}) = 0$, следовательно, из (18.52) получаем $-S = S_A + S_B$, т.е. ударный импульс полностью передается на подшипники.

Эти результаты можно непосредственно получить из (18.2).

Колебательные движения точки,

18.7. системы точек, твердого тела

Колебательные движения точки возникают при условии, что на точку, отклоненную каким-либо образом в начальный момент времени $t = 0$ от положения покоя, действует при $t > 0$ сила, стремящаяся вернуть точку в положение покоя. В идеальном случае (при отсутствии диссипации) точка движется при $t > 0$ под действием двух сил: восстанавливающей силы и силы инерции. Восстанавливающая сила обычно является потенциальной, и ее изменение связано с изменением потенциальной энергии; сила инерции связана с изменением кинетической энергии, причем полная энергия при этом постоянна. Таким образом, колебательное движение в идеальном случае представляет собой бесконечный процесс преобразования потенциальной энергии в кинетическую и обратно.

Колебания тела, лежащего на гладкой горизонтальной плоскости. Пусть тело весом P лежит на гладкой горизонтальной плоскости в положении O (рис. 18.15) и соединено с недеформированной пружиной, другой конец которой закреплен в точке A .

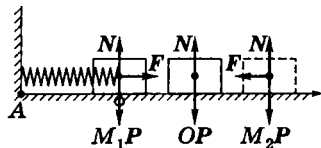


Рис. 18.15

Вес P и реакция плоскости N взаимно уравновешиваются. В момент $t = t_0$ тело отклонено и находится в положении M_1 , в котором на него действуют силы P , N и сила сжатой пружины F , стремящаяся вернуть тело в положение покоя O . Обычно $F = F(x)$. В случае малых колебаний $F = c|x|$, где c — коэффициент жесткости пружины. В положении M_1 тело имеет кинетическую энергию $T = 0$ и максимум потенциальной энергии.

При $t > t_0$ тело движется к положению покоя O , но так как в точке O потенциальная энергия равна нулю, а кинетическая имеет максимум, то по инерции тело проскакивает положение покоя и, растягивая пружину, достигает точки M_2 , причем в идеальном случае $OM_1 = OM_2$, следовательно, потенциальная энергия сжатой пружины равна потенциальной энергии растянутой, а кинетическая равна нулю. Далее тело, двигаясь под действием растянутой пружины, придет в положение M_1 .

В случае линейных колебаний время возврата тела T — величина постоянная, зависящая только от массы тела и жесткости пружины, и называется *периодом колебаний*. Таким образом, в случае малых колебаний перемещение точек тела должно описываться периодической функцией времени с периодом T . Колебания, обладающие свойством $T = \text{const}$, называются *изохронными*. В общем случае нелинейной функции $F(x)$ колебания могут не обладать свойством изохронности.

На основании принципа Даламбера

$$mW + F = 0, \quad (18.58)$$

или в силу одномерности задачи, проецируя на ось x ,

$$m\ddot{x} + F(x) = 0,$$

в линейном случае имеем

$$m\ddot{x} + cx = 0.$$

Если поверхность не гладкая, то необходимо учитывать силу трения $R(\dot{x})$ в уравнении (18.58):

$$mW + F + R = 0. \quad (18.59)$$

В одномерном случае

$$m\ddot{x} + F(x) + R(\dot{x}) = 0.$$

В линейном случае

$$m\ddot{x} + cx + \alpha\dot{x} = 0,$$

где α — коэффициент вязкости.

Колебания при $\alpha > 0$ будут затухающими во времени, а при $\alpha < 0$ — нарастающими.

В случае, если на тело в процессе движения $t > 0$ действует внешняя сила $f = f(t)$, зависящая только от t и не зависящая от переменных состояния x , \dot{x} , то в уравнении (18.59) появляется сила f в правой части:

$$mW + F + R = f.$$

В одномерном случае

$$m\ddot{x} + F(x) + R(\dot{x}) = f(t),$$

соответственно для линейных колебаний

$$m\ddot{x} + cx + \alpha\dot{x} = f(t).$$

Сила $f(t)$ называется *вынуждающей*.

Колебания, совершаемые телом в отсутствие вынуждающей силы, называются *свободными*, а при ее наличии — *вынужденными*.

Колебания тела, подвешенного на пружине. Пусть тело весом P подвешено на пружине AB , конец A закреплен неподвижно (рис. 18.16). Когда тело находится в положении O , пружина не деформирована, в положении покоя $y = u_{\text{ст}}$. Каким-либо образом груз смещается в положение M_0 и в момент

времени $t = t_0$ тело имеет в общем случае параметры $y = y_0$, $\dot{y} = \dot{y}_0$.

На тело действуют сила тяжести P и сила упругости пружины F . На основании принципа Даламбера

$$mW = P - F.$$

В проекции на ось y

$$m\ddot{y} = P - F_y.$$

В линейном приближении в положении M при $t > t_0$, определяемом координатой y , полная деформация пружины равна $u_{\text{ст}} + y$, а модуль силы упругости $F = c(u_{\text{ст}} + y)$, где c — жесткость пружины. Проекция силы F на ось y $F_y = -c(u_{\text{ст}} + y)$.

Когда тело находится в состоянии покоя, то его вес уравновешивается силой упругости, равной по модулю $F_{\text{ст}} = cu_{\text{ст}}$, т.е.

$$P = F_{\text{ст}} = cu_{\text{ст}}, \quad c = P/u_{\text{ст}}. \quad (18.60)$$

Подставим в (18.16) выражения для F_y и c из (18.60):

$$m\ddot{y} = P - \frac{P}{u_{\text{ст}}}(u_{\text{ст}} + y) = -cy.$$

Таким образом, получаем дифференциальное уравнение вида

$$m\ddot{y} + cy = 0. \quad (18.61)$$

Аналогично горизонтальным колебаниям при учете сопротивления колебаниям тела (воздух, жидкость, поле) уравнение (18.61) будет иметь вид

$$m\ddot{y} + cy + \alpha\dot{y} = 0,$$

а при наличии вынуждающей силы $f(t)$

$$m\ddot{y} + cy + \alpha\dot{y} = f(t).$$

Физический маятник. Физическим маятником называется твердое тело, имеющее неподвижную горизонтальную ось

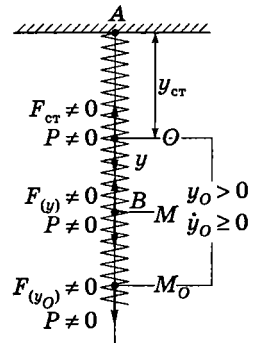


Рис. 18.16

вращения, не проходящую через его центр тяжести, и находящееся под действием только силы тяжести.

Совместим ось подвеса (вращения) маятника с осью x , координатная плоскость Oyz проведена через центр масс C тела. Совместим эту плоскость с плоскостью чертежа (рис. 18.17). Отклоним маятник от положения покоя. В этом положении на него действуют внешние силы: сила тяжести P и составляющие реакции цилиндрического шарнира Y_O, Z_O . Трением в шарнире пренебрегаем.

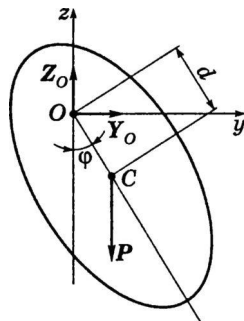


Рис. 18.17

Очевидно, что реакции Y_O, Z_O не имеют моментов относительно оси x (проходит через точку $O \perp$ плоскости чертежа). Момент силы P относительно Ox

$$M_x = -Pd \sin \varphi. \quad (18.62)$$

Подставив (18.62) в уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси, получим

$$J_x \ddot{\varphi} = -Pd \sin \varphi.$$

Запишем полученное уравнение в виде

$$\ddot{\varphi} + \frac{gd}{J_x} \sin \varphi = 0,$$

где g — ускорение свободного падения.

Линейные (малые) колебания физического маятника описываются уравнением

$$\ddot{\varphi} + \frac{gd}{J_x} \varphi = 0.$$

При наличии сопротивления движению

$$\ddot{\varphi} + \frac{gd}{J_x} \varphi + \alpha \dot{\varphi} = 0.$$

Если на физический маятник действует вынуждающая сила $f(t)$, то уравнение малых колебаний имеет вид

$$\ddot{\varphi} + \frac{gd}{J_x} \varphi + \alpha \dot{\varphi} = f(t).$$

Математический маятник. *Математическим маятником* называется материальная точка массой m , подвешенная на невесомой нерастяжимой нити (стержне) длиной l . На точку действует сила тяжести $P = mg$. Движение маятника описывается уравнением

$$ml\ddot{x} + mg \sin x = 0,$$

которое в стандартной форме записывается как

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \sin x = 0, \quad \omega_0^2 = g/l.$$

В линейном приближении

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

При наличии сил сопротивления уравнение колебаний имеет вид

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \alpha \dot{x} = 0,$$

а при наличии возмущающей силы $f(t)$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \alpha \dot{x} = f(t).$$



ЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

19.1. Свободные незатухающие колебания

Примеры линейных колебаний, рассмотренные в (18.10), математически сводятся к дифференциальному уравнению вида

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (19.1)$$

Согласно методу характеристического уравнения решение ищут в виде

$$x = e^{\lambda t}. \quad (19.2)$$

Подставив (19.2) в (19.1), получим

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0. \quad (19.3)$$

Решения характеристического уравнения (19.3) запишем в виде

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0, \quad i = \sqrt{-1}.$$

Общее решение уравнения (19.1) имеет вид

$$x = C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t}.$$

Так как решение должно быть действительной функцией от t , то

$$x = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t, \quad (19.4)$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, которые определяются из начальных условий

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0. \quad (19.5)$$

Решение (19.4) с учетом (19.5) записывается в виде

$$x = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega_0 t. \quad (19.6)$$

Общее решение (19.6) можно записать также в виде

$$x = a \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad (19.7)$$

$$a = \frac{1}{\omega} \sqrt{\dot{x}_0^2 + \omega^2 x_0^2} - \frac{\sqrt{2h}}{\omega}, \quad \operatorname{tg} \alpha = -\frac{\dot{x}_0}{\omega x_0}.$$

Линейным осциллятором называется механическая система, движение которой полностью описывается дифференциальным уравнением вида (19.1). Осциллятор совершает незатухающие гармонические колебания, описываемые функцией (19.7), где a — амплитуда колебаний; аргумент косинуса $(\omega_0 t + \alpha)$ — фаза колебаний; α — начальная фаза, зависящая от выбора начала отсчета времени, период колебаний

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 60\nu^{-1},$$

где ν — число колебаний за 1 с, $\nu = 1$ Гц — это частота, при которой за одну секунду совершается одно колебание.

Кинетическая и потенциальная энергия гармонического осциллятора

$$T = \frac{1}{2} \dot{x}^2, \quad \Pi = -\omega_0^2 \frac{x_0^2 - x^2}{2}.$$

Так как диссипация энергии отсутствует, то $E = T + \Pi = \text{const}$, и первый интеграл имеет вид

$$\frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{\omega_0^2}{2} (x^2 - x_0^2) = h, \quad E = h. \quad (19.8)$$

Плоскость с координатами (x, \dot{x}) называется *фазовой*. Из (19.8)

$$\dot{x}^2 = 2 \left(h - \frac{\omega_0^2}{2} (x^2 - x_0^2) \right). \quad (19.9)$$

На рис. 19.1, а изображена функция $\Pi(x)$, а на рис. 19.1, б — график функции (19.9).

Кривые в фазовой плоскости называются *фазовыми траекториями*, которые образуют фазовый портрет системы. Эллипсы, образующие фазовый портрет для линейных колебаний, соответствуют заданным начальным условиям (начальная потенциальная энергия). Фазовые портреты позволяют изучать систему без решения уравнений движения. Точка с координатами $(x_0, 0)$ является положением равновесия осциллятора и в соответствии с классификацией особых точек представляет собой «центр».

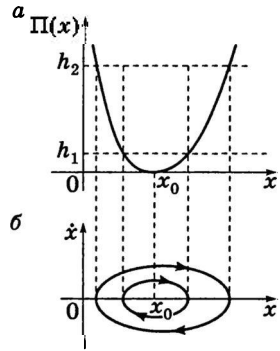


Рис. 19.1

19.2. Свободные затухающие колебания

Запишем уравнение движения в виде

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

где γ — коэффициент затухания.

Тогда характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 + 2\lambda\gamma + \omega_0^2 = 0,$$

а его корни

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}.$$

Рассмотрим три случая:

1. $\gamma^2 < \omega_0^2$, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$.

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\gamma t} [C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}] = e^{-\gamma t} \left[x_0 \cos \omega t + \frac{\gamma x_0 + \dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t \right] = \\ &= a e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \alpha). \end{aligned} \quad (19.10)$$

$$a = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\gamma x_0 + \dot{x}_0}{\omega} \right)^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{x_0 \omega}{\gamma x_0 + \dot{x}_0}.$$

Из (19.10) следует, что затухающие гармонические колебания имеют убывающую амплитуду, собственную частоту $\omega < \omega_0$ (рис. 19.2).

2. $\gamma^2 > \omega_0^2$.

Общее решение имеет вид

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left[C_1 e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} + C_2 e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} \right] \quad (19.11)$$

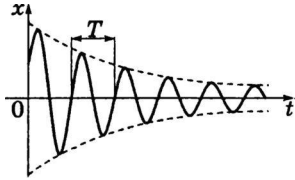


Рис. 19.2

и описывает аperiodическое движение. С учетом начальных условий (19.11) имеет вид, показанный на рис. 19.3, для различных \dot{x}_0 :

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left[x_0 \cosh \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t + \frac{\dot{x}_0 + \gamma x_0}{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} \sinh \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t \right]$$

3. $\gamma^2 = \omega_0^2$ — аperiodический граничный случай (рис. 19.4),

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\gamma.$$

$$x(t) = e^{-\gamma t} [C_1 + C_2 t].$$

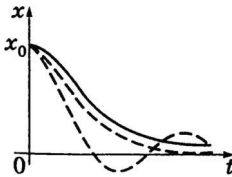


Рис. 19.3

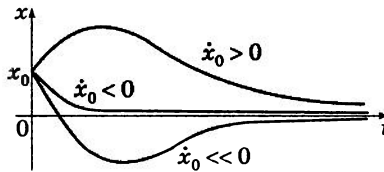


Рис. 19.4

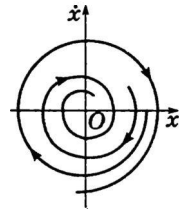


Рис. 19.5

С учетом начальных условий

$$x(t) = e^{-\gamma t} [x_0 + (\dot{x}_0 + \gamma x_0) t].$$

В фазовой плоскости имеем также три случая.

1. $\gamma^2 < \omega^2$.

Фазовые траектории — спирали, закручивающиеся вокруг точки O (рис. 19.5). Точка O — особая точка типа «фокус». Величина $d = e\gamma r$ называется **декрементом (затуханием) колебания**.

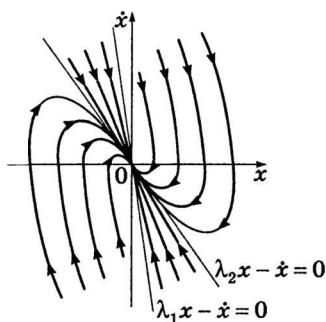


Рис. 19.6

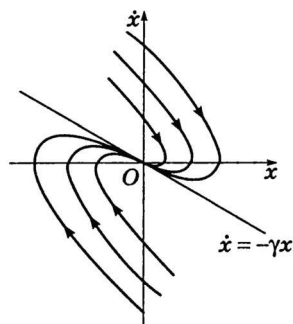


Рис. 19.7

2. $\gamma^2 > \omega_0^2$.

Процесс успокоения системы асимптотически устойчивый, но ни за какое конечное время система в нуль не приходит.

На рис. 19.6 изображена еще одна особая точка «узел».

3. $\gamma^2 = \omega^2$.

При $t \rightarrow \infty$ фазовые кривые по касательной приближаются к прямой $\dot{x} = -\gamma x$. Особая точка O называется «вырожденным узлом» (рис. 19.7).

Особые точки осцилляторов с затуханием притягивают фазовые траектории и называются *аттракторами*.

Вынужденные колебания осциллятора без затухания. Резонанс, биение

19.3

Рассмотрим уравнение движения вида

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f(t), \quad (19.12)$$

где $f(t)$ — возмущающая сила.

Общее решение уравнения (19.12) представляется в виде суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного:

$$x(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t + x_q(t). \quad (19.13)$$

Для нахождения частного решения применяется метод неопределенных коэффициентов или метод Лагранжа — метод вариации произвольных постоянных. Рассмотрим *метод Лагранжа*.

Представим $x_q(t)$ в виде

$$x_q(t) = y_1(t) \cos \omega_0 t + y_2(t) \sin \omega_0 t, \quad (19.14)$$

где $y_1(t)$, $y_2(t)$ — искомые функции.

Продифференцировав (19.14), получим

$$\dot{x}_q(t) = \dot{y}_1 \cos \omega_0 t + \dot{y}_2 \sin \omega_0 t + \omega_0(-y_1 \sin \omega_0 t + y_2 \cos \omega_0 t).$$

Потребуем, чтобы выполнялось условие

$$\dot{y}_1 \cos \omega_0 t + \dot{y}_2 \sin \omega_0 t = 0, \quad (19.15)$$

тогда

$$\dot{x}_q(t) = \omega_0(-y_1 \sin \omega_0 t + y_2 \cos \omega_0 t). \quad (19.16)$$

Продифференцировав (19.16), получим

$$\ddot{x}_q(t) = \omega_0(-\dot{y}_1 \sin \omega_0 t + \dot{y}_2 \cos \omega_0 t) - \omega^2 x_q(t). \quad (19.17)$$

Подставив (19.17) в (19.12), получим еще одно уравнение для нахождения $y_1(t)$, $y_2(t)$:

$$-\dot{y}_1 \sin \omega_0 t + \dot{y}_2 \cos \omega_0 t = f(t)\omega_0. \quad (19.18)$$

Разрешив систему уравнений (19.15), (19.18) относительно $\dot{y}_1(t)$, $\dot{y}_2(t)$, получим

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -\frac{1}{\omega_0} f(t) \sin \omega_0 t, \\ \dot{y}_2 = \frac{1}{\omega_0} f(t) \cos \omega_0 t. \end{cases} \quad (19.19)$$

Проинтегрировав (19.19), найдем

$$\begin{cases} y_1(t) = -\frac{1}{\omega_0} \int_{t_0}^t f(t) \sin \omega_0 t dt + C_1, \\ y_2(t) = \frac{1}{\omega_0} \int_{t_0}^t f(t) \cos \omega_0 t dt + C_2. \end{cases} \quad (19.20)$$

Постоянные C_1, C_2 определяются из начальных условий.
Пусть

$$f(t) = b \cos(vt + \beta), \quad v > 0, \quad (19.21)$$

где b — амплитуда.

Подставляя (19.21) в (19.20), получаем

$$\begin{cases} y_1(t) = -\frac{b}{2\omega_0} \int_{t_0}^t \{\sin[(\omega_0 + v)t + \beta] + \sin[(\omega_0 - v)t - \beta]\} dt + C_1, \\ y_2(t) = \frac{b}{2\omega_0} \int_{t_0}^t \{\cos[(\omega_0 - v)t - \beta] + \cos[(\omega_0 + v)t + \beta]\} dt + C_2. \end{cases} \quad (19.22)$$

Как следует из вида (19.22), структура частного решения зависит от значения разности $\omega_0 - v$.

1. $\omega_0 \neq v$, тогда

$$\begin{cases} y_1(t) = \frac{b}{2\omega_0} \left\{ \frac{\cos[(\omega_0 + v)t + \beta]}{\omega_0 + v} + \frac{\cos[(\omega_0 - v)t - \beta]}{\omega_0 - v} \right\}, \\ y_2(t) = \frac{b}{2\omega_0} \left\{ \frac{\sin[(\omega_0 - v)t - \beta]}{\omega_0 - v} + \frac{\sin[(\omega_0 + v)t + \beta]}{\omega_0 + v} \right\}. \end{cases} \quad (19.23)$$

Подставив (19.23) в (19.14) и выполнив преобразования, получим

$$x_q(t) = \frac{b}{\omega_0^2 - v^2} \cos(vt + \beta).$$

2. $v = \omega_0 + \varepsilon$ — биение.

Представим общее решение (19.13) в виде

$$\begin{aligned} x(t) &= \operatorname{Re}\{A \exp(i\omega_0 t) + B \exp[i(\omega_0 + \varepsilon)t]\} = \\ &= \operatorname{Re}\{[A + B \exp(i\varepsilon t)] \exp(i\omega_0 t)\}, \end{aligned}$$

где $A = a \exp(i\alpha)$, $B = b \exp(i\beta) / (\omega_0^2 - v^2)$, постоянные a и α зависят от начальных условий. Так как ε мало, то закон $x(t)$ можно интерпретировать как колебания с частотой ω и медленно изменяющейся амплитудой

$$d = |A + B \exp(i\varepsilon t)|.$$

Представив комплексные числа A и $B \exp(i\epsilon t)$ векторами на комплексной плоскости и используя теорему косинусов, найдем

$$d^2 = a^2 + \frac{b^2}{(\omega_0^2 - \nu^2)^2} + 2 \frac{ab}{\omega_0^2 - \nu^2} \cos(\epsilon t + \beta - \alpha).$$

С течением времени амплитуда d периодически изменяется, оставаясь ограниченной:

$$\left| a - \frac{b}{|\omega_0^2 - \nu^2|} \right| \leq d \leq \left| a + \frac{b}{|\omega_0^2 - \nu^2|} \right|.$$

Это явление называется *биением* (рис. 19.8).

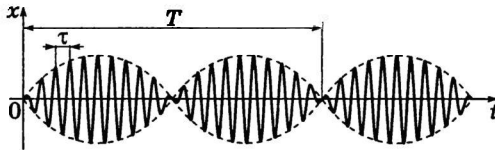


Рис. 19.8

На рис. 19.8 T — период изменения амплитуды; τ — период изменения вынуждающей силы $f(t)$.

3. $\nu = \omega_0$ — резонанс.

Тогда

$$\begin{cases} y_1(t) = -\frac{b}{2\omega_0} \int_{t_0}^t [\sin(2\omega_0 t + \beta) - \sin \beta] dt + C_1, \\ y_2(t) = -\frac{b}{2\omega_0} \int_{t_0}^t [\cos(2\omega_0 t + \beta) + \cos \beta] dt + C_2. \end{cases} \quad (19.24)$$

Проинтегрировав (19.24), найдем

$$\begin{cases} y_1(t) = \frac{b}{2\omega_0} \left[\frac{\cos(2\omega_0 t + \beta)}{2\omega_0} + t \sin \beta \right], \\ y_2(t) = \frac{b}{2\omega_0} \left[\frac{\cos(2\omega_0 t + \beta)}{2\omega_0} + t \sin(\omega_0 t + \beta) \right]. \end{cases} \quad (19.25)$$

Подставив (19.25) в (19.13), выделим частное решение в виде

$$x_{\text{ч}}(t) = \frac{bt}{2\omega_0} \sin(\omega_0 t + \beta).$$

Амплитуда колебания растет линейно во времени. Это явление называется *частотным резонансом* (рис. 19.9).

Рост амплитуды колебаний ставит вопрос о корректности применения уравнения малых линейных колебаний для описания явления резонанса.

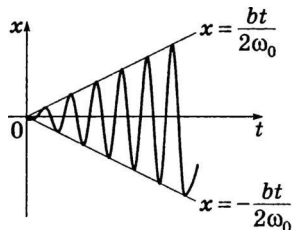


Рис. 19.9

19.4 Вынужденные затухающие колебания

Пусть колебание описывается уравнением

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos vt. \quad (19.26)$$

Заменим возмущающую силу $f_0 \cos vt$ более общей комплексной функцией $f_0 \exp(ivt) = f_0(\cos vt + i \sin vt)$, тогда решение $x(t)$ также будет комплексной функцией:

$$x(t) = A e^{i(vt - \varphi)}, \quad (19.27)$$

где A — амплитуда.

Запишем уравнение (19.27) в виде

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 e^{ivt}. \quad (19.28)$$

Подставив (19.27) в (19.28), получим

$$A(-v^2 + 2i\gamma v + \omega_0^2) = f_0 e^{i\varphi},$$

откуда модуль левой части

$$A\sqrt{(\omega_0^2 - v^2)^2 + 4\gamma^2 v^2} = f_0,$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\gamma v}{\omega_0^2 - v^2}.$$

1. Если $\omega_0^2 > \gamma^2$, тогда $\text{Re } x(t)$ является решением уравнения (19.26):

$$x(t) = ae^{-\gamma t} \sin(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t + \alpha) + A \cos(vt - \varphi). \quad (19.29)$$

Произвольные постоянные a и α определяются из начальных условий.

2. Если $\omega_0^2 < \gamma^2$, то

$$x(t) = ae^{-\gamma t} \text{sh}(\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t + \alpha) + A \cos(vt - \varphi). \quad (19.30)$$

3. Если $\omega_0^2 = \gamma^2$, то

$$x(t) = e^{-\gamma t}(C_1 t + C_2) + A \cos(vt - \varphi), \quad (19.31)$$

где C_1, C_2 определяются из начальных условий.

Как следует из выражений (19.29), (19.30), (19.31), первое слагаемое описывает затухающие колебания (рис 19.10, а), второе слагаемое — вынужденные незатухающие колебания (рис. 19.10, б), результирующее движение изображено на рис. 19.10, в.

Из полученных решений и графика, представленного на рис. 19.10, в, следует, что в установившемся режиме колебаний для достаточно больших t $x(t) \rightarrow x_2(t)$.

Таким образом, вынужденные колебания в отличие от свободных при наличии диссипации не затухают за счет притока энергии.

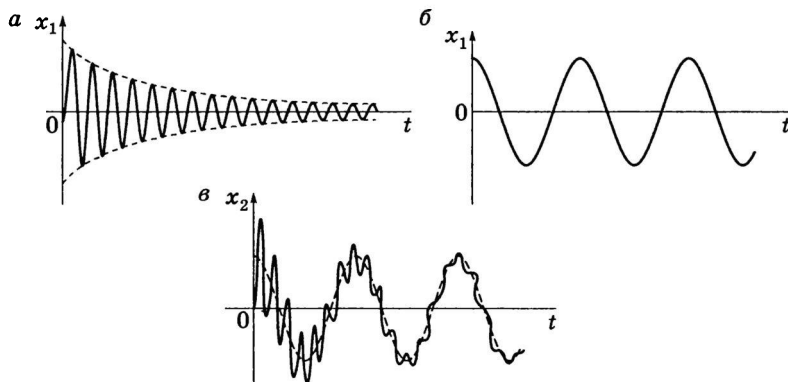


Рис. 19.10

Частота ν и период $T = 2\pi/\nu$ вынужденных колебаний в этом случае равны частоте и периоду вынуждающей силы, т.е. сопротивление движению не влияет на частоту и период вынужденных колебаний.

Фаза вынужденных колебаний $(\nu t - \varphi)$ отстает от фазы вынуждающей силы на величину φ , которая называется *сдвигом фазы*, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\gamma\nu}{\omega_0^2 - \nu^2}$. Зависимость $\varphi(\nu)$ изображена на рис. 19.11.

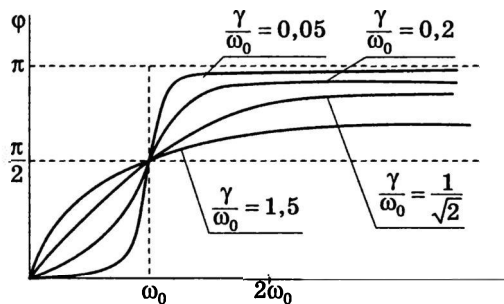


Рис. 19.11

Амплитуда вынужденных колебаний в зависимости от ν изображена на рис. 19.12.

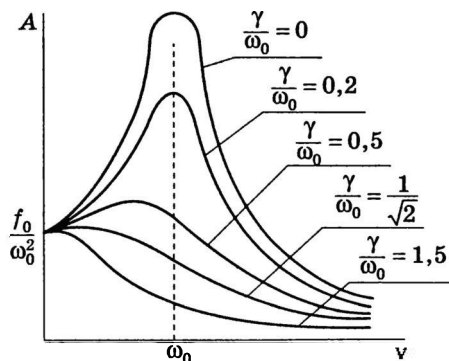


Рис. 19.12

Максимум амплитуды колебаний

$$A_{\max} = \frac{f_0}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}.$$

ЭЛЕМЕНТЫ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ

-
20. **Нелинейные колебания**
 21. **Исследование динамических систем
методом сечений Пуанкаре**
 22. **Детерминированный хаос
в диссипативных динамических
системах**
 23. **Диссипация энергии в динамических
системах, аттракторы, фракталы.
Переход к хаотическому движению**
 24. **Устойчивость движения, показатели
Ляпунова и классификация
аттракторов**
 25. **Синергетика и автоколебания**

20.1. Особенности нелинейных колебаний

В предыдущих разделах возможность получения результатов в аналитическом или в интегрируемом виде при решении задач была обусловлена тем, что в математическом плане решение большинства рассмотренных вопросов и задач сводилось к решению линейных алгебраических (статика, динамика), обыкновенных линейных дифференциальных уравнений (систем) с постоянными коэффициентами. Рассматриваемые дифференциальные уравнения можно записать в виде

$$a\ddot{y}(t) + b\dot{y}(t) + cy(t) = f(t), \quad (20.1)$$

где коэффициенты a , b , c — в общем случае матрицы и тензоры — характеризуют физико-механические свойства системы, описываемой данным уравнением: a — инерционные свойства; b — диссипативные свойства; c — свойства, связанные со способностью системы запасать потенциальную энергию, например жесткость (упругость). В правой части функция $f(t)$ характеризует внешние воздействия, в зависимости от которых движение может носить колебательный, монотонный и немонотонный характер.

Многообразие видов линейных движений имеет детерминированный (неслучайный) характер. Это выражается в том, что при заданных начальных условиях ($t = 0$) для всех $t > 0$ существует единственное решение, это позволяет достаточно надежно прогнозировать поведение системы, а с инженерной точки зрения и проектировать системы с заданными свойствами (параметрами). При $b = 0$, $f = 0$, $c/a > 0$ получаем задачу на нахождение собственных частот ω колебаний механической системы. Решение этой задачи с помощью метода характери-

стических уравнений дает возможность построить распределение частот (частотный портрет системы). Необходимо отметить, что соотношение между величинами коэффициентов a , b , c существенно влияет на характер собственных колебаний системы и график зависимости $y(t)$ — амплитудный портрет системы.

В гл. 19 были рассмотрены различные варианты соотношений между коэффициентами b и c , обуславливающих затухающий и колебательный характер движения. Отметим, что особого исследования требует случай, когда коэффициент a численно значительно меньше значений b и c . Математически эта проблема связана с исследованием систем с малым параметром при старшей производной, что с механической точки зрения описывает интересные и довольно неожиданные аспекты поведения системы.

В реальных системах ее параметры (коэффициенты a , b , c), как правило, могут считаться постоянными лишь в определенных диапазонах изменения времени амплитуд и энергий. Еще Рэлеем было установлено, что уменьшение жесткости системы ведет к уменьшению величины собственных частот колебаний системы, а уменьшение инерционных свойств — к росту величины собственных частот колебаний системы.

Математически учет изменения параметров системы можно изучить на модели, описываемой уравнением

$$a(t)\ddot{y} + b(t)\dot{y} + c(t)y = f(t). \quad (20.2)$$

Уравнение (20.2) для произвольных функций $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ неинтегрируемо, чем существенно отличается от уравнения (20.1). Не существует общих методов решения такого обыкновенного дифференцируемого уравнения в квадратурах (интегралах).

Причины изменения параметров $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ могут быть разными. Например, в процессе эксплуатации физико-механические свойства машин, конструкций изменяются за счет накопления повреждений в виде микротрещин, микропор, дислокаций, коррозии и т.д. Изменение параметров системы может также свидетельствовать о ее способности к адаптации.

Целенаправленно изменяя параметры, можно регулировать и управлять поведением системы. Изменение коэффициентов обуславливает состояние самой системы.

Математически это можно описать системой уравнений вида

$$\begin{cases} \dot{a}^{(k)} = A_k(t, y, \dot{y}, u), & \dot{b}^{(k)} = B_k(t, y, \dot{y}, u), \\ \dot{c}^{(k)} = C_k(t, y, \dot{y}, u), & u(t) = f(t), \quad k=0, 1, \end{cases} \quad (20.3)$$

где правая часть может зависеть только от t или только от $u(t)$, характеризующей управление параметрами, или только от (y, \dot{y}) , что характеризует зависимость коэффициентов от состояния самой системы. В левой части при $k=0$ могут стоять только сами функции $a = a^{(0)}$, $b = b^{(0)}$, $c = c^{(0)}$, т.е. производная нулевого порядка или производные первого порядка $\dot{a} = \dot{a}^{(1)}$, $\dot{b} = \dot{b}^{(1)}$, $\dot{c} = \dot{c}^{(1)}$.

В зависимости от вида (20.3) различают системы параметрические неуправляемые:

$$\dot{a}^{(k)} = A^{(k)}(t), \quad \dot{b}^{(k)} = B^{(k)}(t), \quad \dot{c}^{(k)} = C^{(k)}(t), \quad k=0, 1,$$

и/или управляемые:

$$\dot{a}^{(k)} = A^{(k)}[u(t)], \quad \dot{b}^{(k)} = B^{(k)}[u(t)], \quad \dot{c}^{(k)} = C^{(k)}[u(t)], \quad k=0, 1,$$

и нелинейные

$$\begin{aligned} \dot{a}^{(k)} &= A^{(k)}[y, \dot{y}, t], & \dot{b}^{(k)} &= B^{(k)}[y, \dot{y}, t], \\ \dot{c}^{(k)} &= C^{(k)}[y, \dot{y}, t], & k &= 0, 1. \end{aligned} \quad (20.4)$$

Естественно, что возможна любая комбинация этих трех типов.

На протяжении последних десятилетий развитие теоретической механики было связано с исследованием нелинейных систем, характерной особенностью которых является, как следует из (20.4), *эффект самовоздействия*, т.е. система эволюционирует не только за счет внешних воздействий, но и собственного состояния, достигнутого к данному моменту времени. Математически это выражается в том, что в отличие от линейной системы (20.1) с постоянными коэффициентами a , c

(при $b = f = 0$), обладающей свойством изохронности, когда период (частота) колебаний $T = 2\pi/\omega$ зависит только от параметров системы (a, c) и не зависит от состояния (амплитуды) системы, нелинейная система зависит от начальной амплитуды колебаний. Самовоздействие системы обуславливает возможность появления в поведении системы эффектов, называемых *сиnergетическими (совместными)*, таких как самоорганизация системы и детерминированный хаос. В некотором роде временная эволюция любой нелинейной системы происходит между двумя крайними ситуациями: когда система ведет себя четко предсказуемым, управляемым образом, например циклически, или случайным образом, когда управление такой системой детерминированным образом не дает желаемых результатов.

Классическая механика к началу XX в. довела почти до идеала решение линейных задач динамики в первую очередь в теории колебаний, используя принцип суперпозиции, согласно которому любое общее решение для линейной системы может быть «сконструировано» из набора частных решений, определяемых стандартными методами. Для нелинейной динамики принцип суперпозиции в общем случае не применим, хотя в случае малых нелинейностей может быть модернизирован.

Большинство явлений окружающего мира природы и техники описываются нелинейными системами дифференциальных уравнений, а их линейное поведение наблюдается, как правило, в случае достаточно малых амплитуд изменений. В настоящее время не разработаны еще универсальные математические методы, позволяющие решать задачи для параметрических и нелинейных систем в общем виде. Развиваются аналитические подходы качественного исследования систем, позволяющие обнаружить много интересных эффектов. Большое значение в этой области играют методы численного моделирования. Нелинейная динамика составляет содержание современной теоретической механики, элементы которой будут рассмотрены в этом разделе.

Понятие осцилляций, или колебаний, играет важную роль при изучении динамики немонотонной эволюции, характеризуемой движением туда и обратно, регулярным или нерегулярным, что обусловлено двумя причинами. Прежде всего периодические явления необычайно широко распространены как в неорганическом мире, так и в живых организмах, что само по себе придает значимость исследованию периодических явлений. Кроме того, временную эволюцию любой величины с помощью преобразования Фурье можно представить в виде суммы периодических членов. Эти два обстоятельства, взятые вместе, делают периодическое движение краеугольным камнем любой теории, создаваемой для описания эволюции во времени. Отсюда непосредственно ясна та важная роль, которую играет осциллятор как модель, архетип зависящего от времени режима. Не вдаваясь в детали, лишь подчеркнем распространенность периодических явлений в окружающем мире.

Напомним, что, помимо простого маятника, в различных областях механики существует несколько моделей осциллятора. Груз, подвешенный на упругой пружине, традиционный колебательный контур и акустический резонатор Гельмгольца принадлежат к числу классических моделей, эволюция которых описывается дифференциальными уравнениями с периодическими решениями. Было бы неверно рассматривать эти элементарные осцилляторы как простые физические задачи, не имеющие реальной пользы или значения. Наоборот, осцилляторы находят многочисленные приложения в механике, электротехнике, электронике, акустике, биомеханике. В промышленную эпоху осциллятор стал одним из основных компонентов многих созданных человеком машин.

Упомянем также о колебательных, или осцилляторных, явлениях, которые возникают спонтанно. Их анализ проводится теми же методами, а важную роль, которую они играют в повседневной жизни, вряд ли можно преувеличить. Так любое вращающееся устройство, будь то колесо, двигатель, винт, турбина и т.д., порождает колебания, которые могут нарушить его работу и даже привести к разрушению устрой-

ства; поэтому необходима тщательная балансировка двигателя или колес автомашины. Колебания валов и балок, обычно используемых в конструкциях (крыльев самолетов, мостов и т. д.), могут приводить к неприятным, а иногда и к катастрофическим последствиям. Так, после несчастного случая, произошедшего в 1831 г. близ Манчестера, ни одному воинскому подразделению не разрешается переходить через мост, маршируя в ногу, чтобы не вызывать колебаний, которые могут разрушить его. Колебания, возникающие в жидкой и газообразной среде, главным образом в воде и воздухе, могут вызывать потери энергии в системе.

Так как колебательные явления встречаются очень часто, то научно-технический интерес к осциллятору вполне естествен. Прежде чем начинать развивать любую теорию зависящих от времени явлений, необходимо понять, как происходят колебания. Это объясняет, почему наиболее ценные аналитические идеи естественно приводят к рассмотрению такого элементарного осциллятора, как маятник.

20.2. Свободные колебания маятника

Простой маятник — самый известный пример свободного осциллятора. Это масса m в гравитационном поле с ускорением g , подвешенная в точке O на жестком невесомом стержне длиной l (рис. 20.1). Данная масса колеблется в вертикальной плоскости, движение происходит по окружности. Две точки на вертикальной прямой, проходящей через точку подвеса O , являются точками равновесия, из них R устойчивая, а R^1 неустойчивая. Если $\theta(t)$ — угол между стержнем и вертикалью OR в момент времени t , то основной закон механики приводит к уравнению Ньютона в форме

$$ml \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \sin \theta,$$

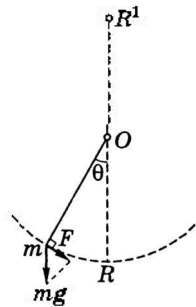


Рис. 20.1

т.е.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0. \quad (20.5)$$

При выводе (20.5) неявно предполагается, что масса имеет точечные размеры, отсутствует трение, а физико-механические характеристики маятника постоянны. Таким образом, на первый взгляд простой процесс колебаний является математически нелинейным и содержит в себе многие проблемы нелинейности. Модель маятника является основой для более сложных моделей природы и техники и моделью нелинейного характера процессов в окружающем нас мире.

При малых углах θ , при которых $\sin \theta \approx \theta$ (линейная аппроксимация) (20.5) имеет вид

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \theta = 0. \quad (20.6)$$

Уравнение (20.6) легко интегрируется при заданных начальных условиях, получаем классический результат:

$$\theta = \theta_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

где ω — угловая скорость; T — период; φ — фаза.

Такое движение точно периодическое: это изохронные малые колебания, используемые, например, в механических часовых механизмах.

Рассмотрим проблему нелинейности с более общей точки зрения, а именно попытаемся определить, какая информация необходима для полного описания мгновенного состояния маятника. Ясно, что для этого необходимо и достаточно знания двух величин: положения θ и скорости $d\theta/dt = \dot{\theta}$. Следовательно, вместо интегрирования уравнения (20.5) можно просто представить решение на плоскости с прямоугольной системой координат $(\theta, \dot{\theta})$. В данном идеальном случае решением является замкнутая кривая, т.е. орбита на плоскости. На практике такого рода представление играет существенную роль во всех исследованиях динамики по следующей простой причине: та-

кое представление служит альтернативой в тех случаях, когда аналитическое интегрирование дифференциальных уравнений оказывается невозможным. Именно поэтому в дальнейшем будем использовать такое представление.

В общем случае можем определить *фазовое пространство (плоскость)* как пространство, в котором осями координат служат положение и скорость, *фазовую траекторию* как кривую в фазовом пространстве, описывающую эволюцию системы. Совокупность фазовых траекторий, как отмечалось в 19.1, называется *фазовым портретом*.

Не менее важным понятием является *степень свободы*, под которой понимается либо каждая пара координат «положение — скорость», связанная с перемещением, либо только один из двух элементов — положение или скорость.

Таким образом, система n тел, способных свободно двигаться по трем пространственным направлениям, обладает либо $3n$, либо $6n$ степенями свободы в зависимости от принятого определения. Число степеней свободы соответствует числу начальных условий, которые могут быть выбраны независимо и поэтому действительно соответствуют выражению «степень свободы». В рассматриваемом примере осциллятора начальное положение и скорость являются двумя величинами, которые могут быть заданы произвольно, поэтому говорим, что *маятник* — это система с двумя степенями свободы, фазовое пространство которой двумерно.

Описание движения в фазовом пространстве. Применим приведенные определения и понятия к исследованию нелинейного уравнения (20.1). В каждой точке на фазовой плоскости $(\theta, \dot{\theta})$ это уравнение определяет ориентацию касательной к траектории. Следовательно, фазовую траекторию по крайней мере можно построить методом последовательных приближений. В рассматриваемом примере важное упрощение происходит от того, что величина $E(\theta, \dot{\theta})$, определяемая соотношением

$$E(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{g}{l} (1 - \cos \theta), \quad (20.7)$$

где l — длина маятника, является интегралом движения.

Действительно,

$$\frac{dE}{dt} = \left(\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta \right) \dot{\theta} \equiv 0.$$

Заметим, что с точностью до множителя размерностью ml эта величина есть не что иное, как *энергия маятника*, которую принято считать равной нулю в состоянии покоя (в точке R на рис. 20.1):

$$E(0, 0) = 0.$$

Следовательно, траектории, удовлетворяющие уравнению (20.7), являются кривыми постоянной энергии, или контурами энергии E , на фазовой плоскости. Так как в (20.7) энергия E — периодическая функция угла θ (с периодом 2π), то траектории достаточно построить в области $\theta \in [-\pi, +\pi]$, $\dot{\theta} \in [-\infty, +\infty]$. Чтобы подчеркнуть это свойство, на рис. 20.2 представлен фазовый портрет математического маятника, траектории которого показаны в более широкой области значений θ . Кривые на плоскости $(\theta, \dot{\theta})$ — линии постоянной энергии маятника. Картина периодична по оси θ (период 2π). В области применимости линейного приближения (20.6) линии постоянной энергии принимают форму окружностей с центрами в точках $\dot{\theta} = 0$, $\theta = \pm 2\pi n$, где n — целое число. Такие кривые соответствуют колебаниям, период которых не зависит от амплитуды — *изохронным малым колебаниям*. Стрелки указывают направление движения во времени. Такие колебания отвечают наименьшим значениям энергии. В отличие от этого в нелинейной области период колебаний возрастает с увеличением амплитуды (и соответственно энергии). Соотношение между периодом T и энергией E имеет вид

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{g}{l}} F\left(\frac{lE}{g}\right).$$

Функция $F(lE/g)$ представляет собой эллиптический интеграл, который расходится при приближении к *сепаратрисе*, т.е. к контуру энергии, проходящему через неустойчивые точки

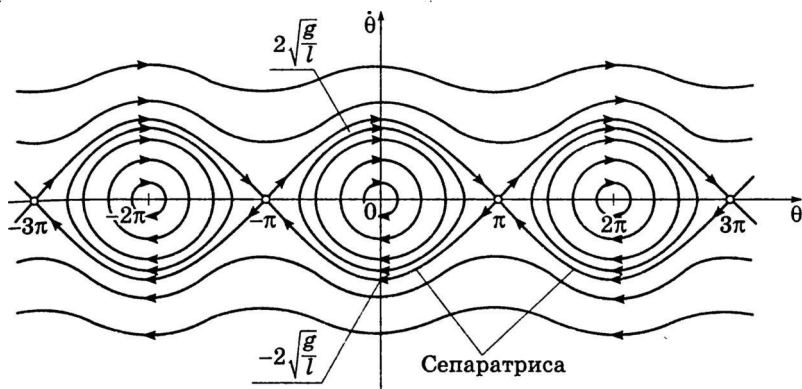


Рис. 20.2

равновесия маятника с координатами $\dot{\theta} = 0$, $\theta = \pm(2n + 1)\pi$ (верхнее положение маятника — точка R^1 на рис. 20.1). На этой сепаратрисе энергия равна $2g/l$, а период бесконечен. Это свойство в действительности лишь отражает тот факт, что маятнику требуется бесконечно много времени для достижения неустойчивого состояния равновесия, когда имеющаяся энергия в точности равна энергии, необходимой для достижения точки R^1 .

При любом значении E , превышающем $2g/l$, колебания сменяются непрерывным вращением вокруг точки O либо в одном, либо в другом направлении.

Каноническая форма уравнений движения. Уравнения (20.5) преобразуются в два дифференциальных уравнения первого порядка:

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta}, \\ \frac{dp_\theta}{dt} = \dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta}, \end{cases} \quad (20.8)$$

где H — гамильтониан, или функция Гамильтона маятника; p_θ — угловой момент, $p_\theta = l\dot{\theta}$.

$$E(\dot{\theta}, \theta) = H(p_\theta, \theta) = \frac{1}{2} \frac{p_\theta^2}{l^2} + \frac{q}{l} (1 - \cos \theta). \quad (20.9)$$

Переменные θ и p_θ канонически сопряжены. Так как

$$\frac{d}{dt} H(p_\theta, \theta) = \frac{\partial H}{\partial p} \dot{p}_\theta + \frac{\partial H}{\partial \theta} \dot{\theta} = 0,$$

энергия остается постоянной при движении. Это свойство позволяет отнести данный маятник к классу *консервативных* (или *гамильтоновых*) систем, для которых характерна инвариантность энергии.

20.3. Консервативные (гамильтоновы) системы

Закон сохранения энергии. В классической механике теоретически возможно описать поведение любой системы без диссипации с помощью функции Гамильтона H , которая зависит от обобщенных пространственных координат (обозначаемых через q_i), обобщенных канонически сопряженных импульсных координат (обозначаемых через p_i) и, возможно, от времени:

$$H(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n, t).$$

Согласно принципу наименьшего действия эта функция удовлетворяет системе $2n$ дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dp_i}{dt} = \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \\ \frac{dq_i}{dt} = \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad i = 1, \dots, n; \end{cases} \quad (20.10)$$

частным случаем является система уравнений (20.6). Когда H не зависит явно от времени:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{dH}{dt} = 0, \quad (20.11)$$

то $H(q, p) = E = \text{const}$.

Таким образом, все системы, описываемые не зависящим от времени гамильтонианом, например математический маятник [уравнение (20.10)], консервативны.

Геометрическая инвариантность (сохранение площадей) в фазовом пространстве. Из закона сохранения энергии следует одно очень важное свойство: сохранение площадей в фазовом пространстве. Исходя из уравнений (20.11) можно доказать, что площадь элемента поверхности $\delta q_i \delta p_i$ фазовой плоскости сохраняется при движении, если H не зависит явно от времени.

Временная инвариантность уравнений динамики. Важное свойство уравнения (20.8) и более общих уравнений (20.10) состоит в том, что на них никак не сказывается изменение знака времени (замена $+t$ на $-t$). Поэтому говорят, что динамика консервативных систем *обратима*.

Инвариантность относительно обращения времени отнюдь не является общим свойством. Она характерна для консервативных систем и отражает тот факт, что фундаментальные физические законы, заключенные в уравнениях (20.10), — инерция, гравитация, — одного и того же рода. Необратимость возникает, если энергия рассеивается, вместо того чтобы сохраняться.

С точки зрения фазового пространства ясно, что сохранение площадей остается в силе при обращении времени. Следовательно, устойчивые траектории остаются устойчивыми: они не расходятся независимо от того, в каком направлении течет время. В отличие от этого, если площадь сохраняется за счет удлинения в одном направлении и сокращения в перпендикулярном направлении, обращение времени приводит к тому, что эти два направления обмениваются характером устойчивости: первоначально устойчивое направление (сжатие) становится неустойчивым (направление растяжения) и наоборот.

20.4. Диссипативные системы

Диссипация энергии вследствие трения. Описание свободного осциллятора было получено путем идеализации математического маятника. В частности, пренебрегли всеми видами

трения — трением стержня и массы о воздух, а также трением в точке подвеса O . На практике движение реального маятника всегда прекращается из-за трения: амплитуда колебаний со временем убывает. Это общее явление рассеяния, или диссипации энергии, необходимо учесть в математическом описании. Если говорить более конкретно, то уравнения (20.10) необходимо модифицировать. Было установлено, что уравнения (20.10), (20.11) инвариантны относительно обращения времени. Но механизм затухания нарушает это свойство, так как приводит в конце концов к прекращению колебаний. Следовательно, в модели трения, необходимо отказаться от инвариантности относительно обращения времени.

Уравнение для осциллятора с затуханием. Проще всего учесть затухание, добавив к уравнению (20.11) член, пропорциональный производной какого-нибудь нечетного порядка, например первую производную от угла θ . Тогда в линейном приближении

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma \frac{d\theta}{dt} + \omega^2\theta = 0, \quad (20.12)$$

где γ — коэффициент затухания; $\omega^2 = g/l$ — квадрат угловой частоты.

В результате получается линеаризованное уравнение маятника с затуханием. Как показывает опыт, это уравнение дает удовлетворительное описание в случае трения типа «трение в жидкости».

Рассмотрим более подробно эволюцию энергии (20.9) в этом случае:

$$E(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}(\dot{\theta}^2 + \omega^2\theta^2).$$

Энергия сохраняется, если $\gamma = 0$ (трение отсутствует), и убывает, если $\gamma > 0$. Так как по определению $E \geq 0$, то энергия стремится к нулю. Следовательно, состояние с нулевой энергией (состояние покоя) устойчиво, поскольку маятник с необходимостью эволюционирует к этому состоянию.

Заметим, что если $\gamma < 0$, то энергия E неограниченно возрастает, разумеется, за исключением того случая, когда исходным является состояние покоя (в этом случае из $\theta = \dot{\theta} = 0$ следует, что $dE/dt = 0$). Но состояние покоя неустойчиво, так как малейшее смещение маятника из состояния покоя со временем только усиливается.

Фазовый портрет системы с затуханием. Решениями уравнения (20.12) являются траектории, касающиеся в каждой точке вектора локальной скорости, две компоненты которого ($x = \theta$, $y = \dot{\theta}$) по определению удовлетворяют уравнениям

$$\frac{dx}{dt} = \dot{\theta} = y,$$

$$\frac{dy}{dt} = \ddot{\theta} = -\gamma\dot{\theta} - \omega^2\theta = -\gamma y - \omega^2 x.$$

Используя математическую терминологию, можно сказать, что траектории являются силовыми линиями векторного поля. Существенно, что через каждую точку, кроме особых точек, в которых векторное поле не определено, проходит только одна силовая линия. Начало координат ($\theta = \dot{\theta} = 0$) — единственная особая точка на плоскости (только в ней обе компоненты скорости равны нулю).

На рис. 20.2 видно, что при $\gamma = 0$ траектории образуют непрерывное семейство замкнутых кривых, охватывающих точку равновесия $\theta = \dot{\theta} = 0$. Если $\gamma \neq 0$, то такое семейство кривых трансформируется во множество траекторий, которые либо сходятся к началу координат, либо расходятся из него в зависимости от знака: $\gamma > 0$ или $\gamma < 0$. Покажем, что при слабом затухании, т.е. когда $|\gamma| \ll \omega$, эти траектории имеют форму спиралей. Действительно, при малом коэффициенте затухания γ временная эволюция угла θ не может сильно отличаться от эволюции при $\gamma = 0$. Следовательно, в качестве первого приближения можно положить

$$\theta \approx \rho(t) \cos(\omega t + \varphi),$$

где $\rho(t)$ — функция времени, медленно изменяющаяся по сравнению с периодом $T = 2\pi/\omega$.

Используя это приближенное выражение, вычислим среднее изменение энергии за один период двумя способами. Во-первых, проинтегрируем мгновенное изменение энергии, т.е. найдем скорость изменения энергии:

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \left(\frac{dE}{dt} \right) dt = -\gamma \langle \dot{\theta}^2 \rangle.$$

Пренебрегая малым изменением функции $\rho(t)$ за один период, получаем

$$\langle \dot{\theta}^2 \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \rho^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi) dt = \frac{1}{2} \rho^2 \omega^2,$$

и, следовательно,

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{2} \gamma \rho^2 \omega^2.$$

Во-вторых, воспользуемся тем, что в том же приближении энергия имеет значение

$$E = \frac{1}{2} [\rho^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi) + \rho^2 \omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi)] = \frac{1}{2} \rho^2 \omega^2,$$

а ее среднее изменение за период определяется выражением

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = \left\langle \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \rho^2 \omega^2 \right) \right\rangle = \frac{1}{2} \omega^2 \left\langle \frac{d\rho^2}{dt} \right\rangle.$$

Комбинируя эти два результата, видим, что за период изменение ρ^2 описывается уравнением

$$\left\langle \frac{d\rho^2}{dt} \right\rangle = -\gamma \langle \rho^2 \rangle.$$

Если коэффициент затухания γ очень мал по сравнению с ω , то, интегрируя это соотношение по времени, получаем

$$\langle \rho^2(t) \rangle = \rho^2(0) \exp(-\gamma t).$$

Таким образом получим параметрическое уравнение траекторий на плоскости $(\theta, \dot{\theta})$:

$$\theta \approx \rho(0) \exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right) \cos(\omega t + \varphi),$$

$$\dot{\theta} \approx -\rho(0) \omega \exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right) \sin(\omega t + \varphi).$$

Это уравнение описывает спирали, закручивающиеся ($\gamma > 0$) или раскручивающиеся ($\gamma < 0$), и окружности ($\gamma = 0$).

На рис. 20.3 схематически показан фазовый портрет уравнения (20.12).

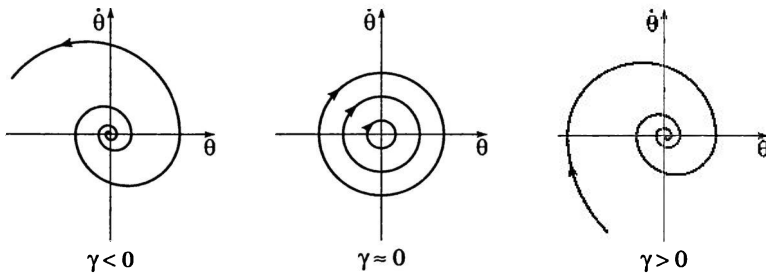


Рис. 20.3

Заметим, что при любом значении γ начало координат является особой точкой, соответствующей стационарному решению уравнения движения. Это стационарное решение устойчиво при $\gamma > 0$ и неустойчиво при $\gamma < 0$, так как в первом случае все траектории сходятся к нему, а во втором расходятся от него. При $\gamma = 0$ говорят, что начало координат обладает нейтральной устойчивостью, поскольку смещения не усиливаются и не затухают со временем.

При $\gamma > 0$ все траектории на фазовой плоскости заканчиваются в начале координат, которое поэтому называется *притягивающей точкой* или *аттрактором*. Это фундаментальное понятие, допускающее обобщение на случай многообразия более высоких размерностей (кривых, поверхностей и т.д.).

Свойства диссипативной системы. Осциллятор с затуханием служит типичным примером диссипативной системы. Динамические свойства диссипативных систем во многих отношениях противоположны свойствам консервативных гамильтоновых систем. С одной стороны, для диссипативных систем, вообще говоря, не существуют гамильтонианы, не зависящие от времени; следовательно, энергия не сохраняется. С другой стороны, в определенных случаях существует функция динамических переменных, называемая *функцией Ляпунова*, которая положительная и монотонно убывает со временем (обуславливая тем самым необратимость). Такая функция существует не всегда.

Диссипативные системы могут обладать гораздо более сложным эволюционным режимом, чем просто затухание, в особенности если динамика включает в себя и эффекты затухания, и механизмы, поддерживающие движение. Во всяком случае, если существует диссипация, уравнения движения изменяются при обращении времени; эволюция диссипативных систем не является обратимой. Наконец, нельзя не упомянуть еще об одном важном обстоятельстве: площади в фазовом пространстве диссипативных систем не сохраняются.

Сжатие площадей в фазовом пространстве. Обратимся к рис. 20.3 и рассмотрим влияние трения ($\gamma > 0$). Ясно, что при таком движении не может сохраняться элемент поверхности $\delta\theta\delta\phi$, так как все траектории, которые проходят через него, заканчиваются в начале координат, т.е. имеет место свойство, характерное для диссипативных систем: площадь любого множества начальных условий в среднем уменьшается во времени. Однако было бы неверно думать, будто сокращение площадей непременно означает сокращение длин.

В действительности все обстоит совсем не так. Площади могут сохраняться и в том случае, если расхождение траекторий в одном направлении компенсируется их сближением в другом. В рассматриваемом случае сокращение площадей может быть достигнуто не только за счет сокращения всех длин, но и за счет уменьшения одних длин, сопровождаемого менее быстрым увеличением других длин.

Простая схема на рис. 20.4 иллюстрирует два случая сжатия площадей (причем в качестве начального элемента поверхности выбран квадрат). Это замечание очень важно для понимания того, что расхождение траекторий по некоторым направлениям остается возможным даже в случае диссипативной системы. В первом ряду (по горизонтали) длина и ширина уменьшаются одновременно и одинаково. Во втором ряду ширина возрастает, но высота убывает быстрее. И в первом, и во втором случае площадь убывает в одном и том же темпе. Таким образом, уменьшение площади в фазовом пространстве отнюдь не обязательно означает, что все размеры области уменьшаются. Знание того, как именно происходит сжатие площадей, и его скорости существенно для динамического описания.

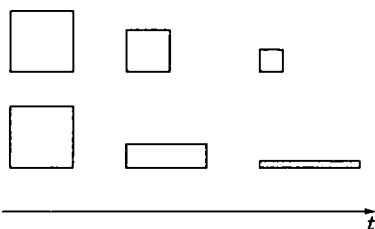


Рис. 20.4

Системы с переменными параметрами

20.5. (параметрические системы)

Уравнения движения. Вернемся к примеру движения математического маятника без трения в гравитационном поле и представим себе, что точка подвеса O (см. рис. 20.1) колеблется в вертикальном направлении или изменяется длина маятника $l = l(t)$. Таким образом определяется параметрический маятник как маятник, один или несколько параметров которого изменяются во времени. Можно было бы поступить иначе и (что эквивалентно) поместить математический маятник в гравитационное поле, изменяющееся во времени:

$$g(t) = g_0 + \beta(t).$$

В этом случае $\beta(t)$ характеризует вертикальное ускорение точки O . В линейном приближении уравнение движения, выведенное из уравнения (20.11), имеет вид

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g(t)}{l}\theta = 0. \quad (20.13)$$

Несмотря на формальное сходство с уравнением (20.6), уравнение (20.13) существенно отличается от него: при произвольной функции $g(t)$ уравнение (20.13) *неинтегрируемо*. Это означает, что в общем случае неизвестно, как решать это обыкновенное дифференциальное уравнение в квадратурах, т.е. выразить решение $\theta(t)$ этого уравнения как явную функцию времени через интегралы от обычных элементарных или трансцендентных функций, таких как рациональные дроби, экспоненты, эллиптические функции и т.д. Что же касается уравнений (20.5), (20.6), то они, наоборот, *интегрируемы*, так как член с $(g/l) \sin \theta$ или $g/l\theta$ не зависит явно от времени.

Несмотря на это различие, состояние покоя $\theta = \dot{\theta} = 0$ по-прежнему остается тривиальным решением приведенного выше уравнения. Однако в том случае, когда g зависит от времени, устойчивость тривиального решения отнюдь не гарантируется и подлежит определению с помощью детального анализа. Хотя априори любая форма функции $g(t)$ заслуживает изучения, рассмотрим только $g(t)$ периодическую по времени: уравнение движения (20.13) называется в этом случае *уравнением Хилла*. Упрощая задачу еще больше и предполагая, что $\beta(t)$ — тригонометрическая функция, приходим к частному случаю уравнения Хилла, известному под названием *уравнение Матье*. Полагая

$$g(t) = g_0 + g_1 \cos(2\omega t),$$

получаем

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 [1 + h \cos(2\omega t)] \theta = 0, \quad (20.14)$$

где $h = g_1/g_0$, $\omega_0^2 = g_0/l$.

Возбуждение, описываемое $h \cos(2\omega t)$, имеет период $T = \pi/\omega$. Не умаляя общности, можно предположить, что $h \geq 0$. Заметим, что ω_0 — угловая частота маятника в отсутствие его параметрического возбуждения ($h = 0$). Так как уравнение (20.14) линейное уравнение второго порядка, то начальные условия $\theta(0)$, $\dot{\theta}(0)$ через каждый период $(\pi/\omega, 2(\pi/\omega), 3(\pi/\omega), \dots)$ претерпевают линейное преобразование, эквивалентное умножению координат на плоскости $(\theta, \dot{\theta})$ на матрицу M . На основе этого в теории Флоке линейных уравнений с периодическими коэффициентами показано, что решения уравнения Матье имеют вид

$$\theta(t) = e^{\mu t} P(t),$$

где μ — собственное значение матрицы M , называемое *характеристическим показателем*; $P(t)$ — функция с периодом $T = \pi/\omega$, такая, что

$$P(t) = P\left(t + \frac{\pi}{\omega}\right).$$

Поиск решений уравнения (20.14) разделим на два этапа. Первый этап сводится к нахождению функции $P(t)$, которая, как уже упоминалось, не может быть выражена через обычные функции: необходимо ввести новый класс трансцендентных функций, называемых *функциями Матье*. Второй состоит в вычислении характеристического показателя μ . Знак вещественной части μ определяет, возрастает решение $\theta(t)$ или убывает. Если вещественная часть μ положительная, то $\theta(t)$ неограниченно возрастает со временем. В этом случае состояние покоя, а в действительности любое решение уравнения (20.14), неустойчиво, так как любое малое возмущение формы движения $\theta(t)$ неограниченно возрастает. Рассмотрим более подробно вопрос устойчивости.

Устойчивые параметрические системы. При малых значениях возбуждения (при h , близких к нулю) показатель μ может быть вычислен по теории возмущений. Так как при $h = 0$ общее решение уравнения (20.14) имеет вид

$$\theta = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \varphi),$$

то по непрерывности при h , близких, но не равных нулю, решение $e^{\mu t} P(t)$ должно мало отличаться от приведенного выше, поэтому заключаем, что выражение (20.15) дает удовлетворительное приближение при малых μ и частоте ω , близкой к ω_0 . Подставляя (20.15) в уравнение Матье (20.14):

$$\theta(t) = e^{\mu t} \cos(\omega t + \varphi), \quad (20.15)$$

получаем

$$\begin{aligned} & \left[\frac{d^2}{dt^2} + \omega_0^2(1 + h \cos(2\omega t)) \right] e^{\mu t} \cos(\omega t + \varphi) = \\ & = \left[(\omega_0^2 - \omega^2 + \mu^2) \cos(\omega t + \varphi) - 2\omega\mu \sin(\omega t + \varphi) + \right. \\ & \left. + \frac{h}{2} \omega_0^2 \cos(\omega t - \varphi) + \frac{h}{2} \omega_0^2 \cos(3\omega t + \varphi) \right] e^{\mu t}. \quad (20.16) \end{aligned}$$

Отбросив член с $\cos(3\omega t + \varphi)$, который, как показывают более подробные вычисления, пренебрежимо мал, найдем условия, при которых правая часть (20.16) равна нулю при всех t . Для этого коэффициенты при $e^{\mu t} \cos(\omega t)$ и $e^{\mu t} \sin(\omega t)$ должны быть равны нулю:

$$\begin{aligned} & \left(\omega_0^2 - \omega^2 + \mu^2 + \frac{h}{2} \omega_0^2 \right) \cos \varphi - 2\omega\mu \sin \varphi = 0, \\ & 2\omega\mu \cos \varphi + \left(\omega_0^2 - \omega^2 + \mu^2 - \frac{h}{2} \omega_0^2 \right) \sin \varphi = 0. \end{aligned}$$

Эта система двух линейных неоднородных уравнений относительно $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$ имеет решение только в том случае, если детерминант системы равен нулю, т.е.

$$(\omega_0^2 - \omega^2 + \mu^2)^2 - \frac{h^2}{4} \omega_0^4 + 4\omega^2 \mu^2 = 0,$$

или

$$\mu^4 + 2(\omega_0^2 + \omega^2) \mu^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \frac{h^2}{4} \omega_0^4 = 0. \quad (20.17)$$

Квадратное уравнение (20.17) относительно μ^2 обладает следующим свойством: сумма его корней всегда отрицательная, а дискриминант всегда положительный. Существуют два вещественных корня, по крайней мере один из которых отрицательный. Так как отрицательному значению μ^2 соответствует чисто мнимый характеристический показатель μ , оно не может быть источником неустойчивости.

Наоборот, решение неустойчиво, если существует вещественное положительное значение μ^2 и, следовательно, μ . Для этого необходимо, чтобы произведение корней было отрицательное, т.е.

$$h > 2 \left| 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right|.$$

На плоскости параметров возбуждения (h, ω) с прямоугольной системой координат это условие задает сектор с вершиной в точке $h = 0$; $\omega/\omega_0 = 1$ (рис. 20.5).

На рис. 20.5 изображена диаграмма устойчивости уравнения Матье на плоскости (h, ω) . Внутри сектора (заштрихованная область) существует положительное значение $\sqrt{\mu^2}$

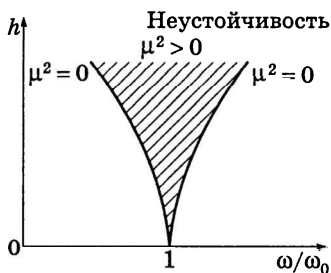


Рис. 20.5

и уравнение (20.14) не имеет устойчивого периодического решения. Под этим подразумевается следующее: существуют начальные условия, очень близкие к состоянию покоя, и такие, что выходящие из начальных точек траектории расходятся экспоненциально. Состояние покоя неустойчиво относительно возбуждения с амплитудой, стремящейся к нулю ($h \rightarrow 0$), если выполняется условие $\omega = \omega_0$ (в этом случае говорят, что имеет место *точный резонанс*). Такого рода неустойчивость часто называют *субгармонической*, так как она приводит к колебаниям маятника с частотой $\omega/2\pi$, равной половине частоты $2\omega/2\pi$ внешнего возбуждения.

Вне области неустойчивости оба возможных значения μ^2 отрицательные. При частоте ω , близкой к ω_0 , и малых h , как

легко проверить, одно из мнимых значений μ близко к нулю, а другое приближенно равно $2i\omega_0$. Эффект, производимый при этом на колебания, состоит в следующем:

- 1) основная частота слегка изменяется из-за наличия характеристического показателя, близкого к $2i\omega_0$;
- 2) малое отрицательное значение μ^2 приводит к низкочастотной модуляции колебаний. Следовательно, режим оказывается квазипериодическим;
- 3) амплитуда этой модуляции произвольна, так как уравнение (20.14) линейно по θ .

Когда параметры возбуждения на плоскости (h, ω) приближаются к области неустойчивости, низкочастотная модуляция уменьшается. Она стремится к нулю, как соответствующее значение μ^2 , на границе области. На самой границе множитель $e^{\mu t}$ в теории Флоке заменяется членом, полиномиальным по времени. Затем внутри сектора неустойчивости показатель становится вещественным. Таким образом, при движении в пространстве параметров видно, как одна частота уменьшается и затем обращается в нуль, причем одновременно возникает неустойчивость. Режим, который появляется в области неустойчивости, определяется нелинейными эффектами, которые не охватываются приведенным выше анализом.

Прежде чем завершить этот параграф, упомянем о том, что на плоскости (h, ω) существуют и другие области неустойчивости. Они соответствуют секторам шириной h^n , не показанным на рис. 20.5, вершины которых расположены в точках $h = 0$ и $\omega/\omega_0 = 1/n$, где n — положительное целое число.

20.6. Затухание параметрических колебаний

Так как во всех физических системах имеется трение, естественно рассмотреть, как изменяются приведенные выше результаты при наличии затухания (см. 20.1–20.4). При слабом трении типа трения в жидкости, т.е. при $0 < \gamma \ll \omega_0$, запишем уравнение вида

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma \frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2(1 + h \cos(2\omega t))\theta = 0. \quad (20.18)$$

Для уравнения (20.18) можно повторить вычисления, приведенные выше. Если величина h мала, то из существования решения в виде (20.15), постулируемой теорией Флоке, следует, что

$$(\omega_0^2 + \omega^2 + \mu^2 + \gamma\mu^2)^2 - \frac{h^2}{4} \omega_0^4 + (2\omega\mu + \omega\gamma)^2 = 0.$$

Нейтральная устойчивость, соответствующая $\mu = 0$, достигается при

$$\frac{h^2}{4} = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{\omega_0^4} \gamma^2.$$

Таким образом, при точном резонансе ($\omega = \omega_0$) состояние покоя является параметрически неустойчивым, если

$$h > \frac{2\gamma}{\omega_0}.$$

Для дестабилизации этого состояния необходим некоторый минимальный уровень параметрического возбуждения. Это легко объясняется необходимостью компенсировать затухание осциллятора. На этот раз главная область субгармонической неустойчивости на плоскости (h, ω) ограничена непрерывной кривой, которая лежит внутри сектора, вычисленного в отсутствие затухания (рис. 20.6). Предполагается, что длительность τ каждого импульса пренебрежимо мала по сравнению с периодом T .

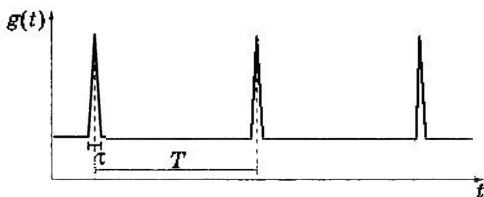


Рис. 20.6

Механизм параметрического усиления. Установим физическую причину субгармонической неустойчивости. Вместо

синусоидального возбуждения рассмотрим функцию $g(t)$ с периодом $T = \pi/\omega$, состоящую из коротких импульсов длины (продолжительностью) τ , где $\tau \ll T$ (рис. 20.7).

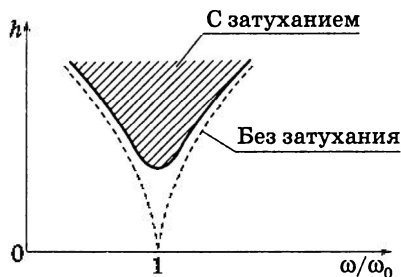


Рис. 20.7

Проинтегрируем уравнение (20.13) по интервалу τ в предположении, что амплитуда импульса, хотя и велика, не может вызывать существенных изменений угла θ за это время. При таких условиях для любой функции $f(\theta)$ справедливо соотношение $\int_{(\tau)} f(\theta) dt = \tau$ (среднее значение $f(\theta)$).

Потребуем также, чтобы в данном приближении выполнялось равенство

$$\int_{(\tau)} \left(\frac{d^2\theta}{dt^2} \right) = \left[\frac{d\theta}{dt} \right], \quad *$$

где $[d\theta/dt]$ — среднее изменение скорости, вызванное импульсом.

Тогда из (20.13) получаем

$$\left[\frac{d\theta}{dt} \right] + G\theta(t) = 0,$$

где $G = \frac{1}{l} \int_{(\tau)} g(t) dt$; $\theta(t)$ — среднее положение маятника за импульс.

В момент, когда маятник достигает своего максимального отклонения, его скорость и кинетическая энергия равны нулю, а потенциальная энергия пропорциональна $(1/2)\theta_{\max}^2$.

Предположим, что именно в этот момент к маятнику прикладывается импульс. Потенциальная энергия при этом не изменяется, так как положение маятника остается прежним. Но скорость получает приращение $[d\theta/dt] = -G\theta_{\max}$, и поэтому кинетическая энергия после импульса равна $(1/2)G^2\theta_{\max}^2$. В результате импульс увеличивает энергию осциллятора в $(1 + G^2)$ раз, причем этот множитель больше единицы. Если следующий импульс поступает в тот самый момент, когда отклонение снова максимально, то маятник дестабилизируется.

Для наступления потери устойчивости необходимо, чтобы последовательные импульсы были разделены интервалом времени, равным целому кратному полупериодов невозмущенного движения маятника. Кратное может быть любым, необязательно целым, но ясно, что такой процесс параметрического усиления особенно эффективен, когда импульс поступает каждый полупериод. Сказанное объясняет, почему на диаграмме устойчивости уравнения Матье на плоскости (h, ω) имеется последовательность областей неустойчивости, исходящих из точек с абсциссами $1/n$. Это соответствует импульсному воздействию через полупериод, период, полтора периода и т.д.

20.7. Элементы теории бифуркации

Описание осцилляторов с вынуждающей силой и параметрических осцилляторов позволяет рассмотреть другое понятие, имеющее фундаментальное значение для исследования динамических систем, — понятие *бифуркации*. Как уже отмечалось, при движении параметрического маятника в плоскости (h, ω) наблюдается полное изменение характера колебаний при пересечении границ, отделяющих устойчивые решения от неустойчивых. Когда решение любого уравнения или системы уравнений претерпевает качественное изменение при фик-

сированном значении параметра, называемом *критическим значением*, это явление называется *бифуркацией*. Точка в параметрическом пространстве, в котором происходит такое изменение, называется *точкой бифуркации*. Из точки бифуркации исходит несколько (две или более) ветвей решения, устойчивых или неустойчивых. Представление любого характеристического свойства решений как функции бифуркационного параметра образует *бифуркационную диаграмму*.

Для этого преобразуем уравнение (20.12), заменив постоянный коэффициент трения γ на коэффициент $\gamma(\theta)$, зависящий от амплитуды θ , согласно выражению

$$\gamma(\theta) = -\gamma_0 \left[1 - \frac{\theta^2}{\theta_0^2} \right],$$

где $\gamma_0 > 0$; θ_0 — исходная амплитуда.

Тогда

$$\gamma_0 < 0 \text{ при } \theta^2 > \theta_0^2,$$

$$\gamma_0 > 0 \text{ при } \theta^2 < \theta_0^2.$$

Заменив γ на $\gamma(\theta)$ в (20.12), получим

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} - \gamma_0 \left[1 - \frac{\theta^2}{\theta_0^2} \right] \frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2 = 0. \quad (20.19)$$

Уравнение (20.19) описывает поведение осциллятора с вынуждающей силой, при котором колебания с малой амплитудой усиливаются, а колебания с большой амплитудой затухают.

Приведем уравнение к безразмерному виду, выбрав $\theta_0 \sqrt{\omega/\gamma_0}$ за единицу амплитуды и $1/\omega$ за единицу времени. Тогда уравнение (20.19) преобразуется к виду

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} - (\varepsilon - \theta^2) \frac{d\theta}{dt} + \theta = 0, \quad (20.20)$$

где $\varepsilon = \gamma_0/\omega$ — безмерный параметр.

Чтобы пояснить введенные понятия, продемонстрируем их на примере осциллятора Ван-дер-Поля, описываемого урав-

нением (20.20). При всех значениях (положительных и отрицательных) бифуркационного параметра ε начало координат $\theta = \dot{\theta} = 0$ всегда является особой точкой. При $\varepsilon < 0$ начало координат устойчиво (и, следовательно, является *аттрактором*), но становится неустойчивым при $\varepsilon > 0$ и переходит в другой аттрактор — *предельный цикл*. Таким образом, при критическом значении параметра $\varepsilon_c = 0$ происходит изменение характера устойчивого решения. Построив график какого-нибудь типичного свойства решения, например максимального отклонения, как функции параметра ε , получим диаграмму, изображенную на рис. 20.8, а. Как видно из рисунка, при $\varepsilon_c = 0$ устойчивое решение претерпевает качественные изменения: вместо притягивающей неподвижной точки появляется предельный цикл, начальная амплитуда которого равна нулю. Ось ε выбрана вертикальной из соображений удобства. Чтобы подчеркнуть значение этой бифуркационной диаграммы, покажем на фазовой плоскости форму фазовых траекторий (рис. 20.8, б) при $\varepsilon < \varepsilon_c$, $\varepsilon = \varepsilon_c$ и $\varepsilon > \varepsilon_c$.

Напомним, что при $\varepsilon = \varepsilon_c = 0$ осциллятор находится в состоянии нейтральной устойчивости: в фазовой плоскости нет аттрактора и всякое начальное условие порождает свою собственную траекторию.

Бифуркация Хопфа. Когда при достижении критического значения параметра из точки рождается предельный цикл, получаем явление, известное под названием *бифуркация Хопфа*. Бифуркации Хопфа встречаются в векторных полях и диффеоморфизмах. Их механизм не зависит ни от числа степеней свободы, ни от конкретной формы уравнений, ни от приложений. Рассмотрим два главных свойства предельного цикла в окрестности точки бифуркации Хопфа. Одно из свойств имеет место для уравнения (20.20): амплитуда предельного цикла пропорциональна $|\varepsilon - \varepsilon_c|^{1/2}$, т.е. амплитуда растет как квадратный корень из расхождения от точки бифуркации. Другое свойство состоит в том, что период колебаний не зависит от $|\varepsilon - \varepsilon_c|$ по крайней мере в первом приближении (в действительности до второго приближения включительно). Графически свойства бифуркации Хопфа показаны на рис. 20.9. Эти две

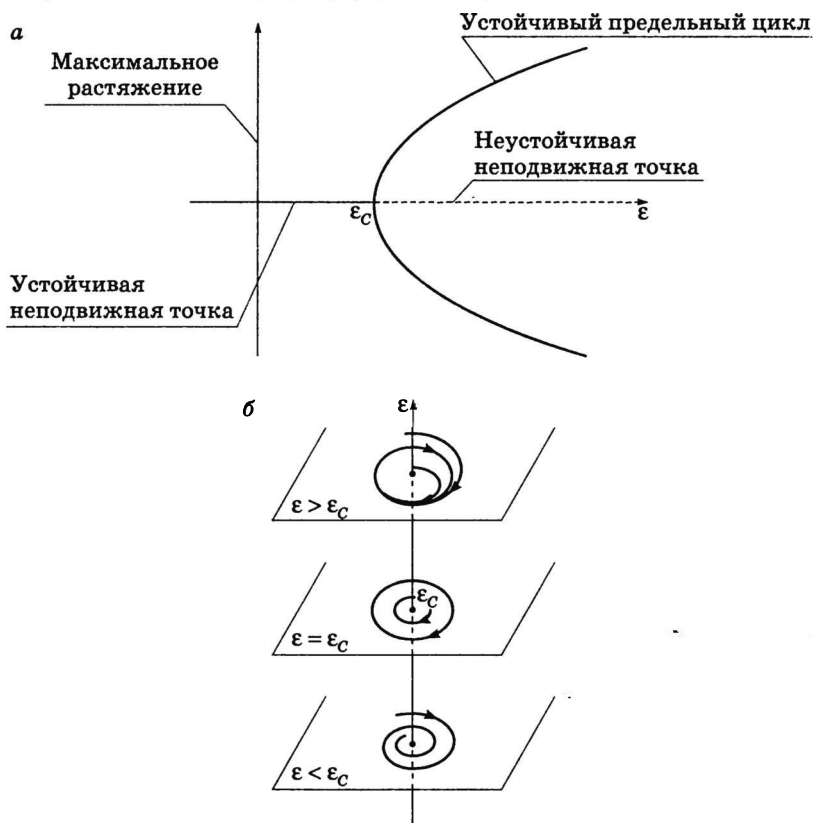


Рис. 20.8

типичные особенности представляют большой практический интерес, так как их можно использовать для идентификации бифуркации Хопфа.

Субкритическая и суперкритическая бифуркация. Бифуркация, порождаемая уравнением (20.20) при $\epsilon = \epsilon_c = 0$, называется *суперкритической (надкритической)* или *нормальной*. Предельный цикл рождается с нулевой амплитудой, и в точке бифуркации система находится в состоянии нейтральной устойчивости. Обусловлена она наличием диссипативного члена $\theta^2 \dot{\theta}$, противодействующего неустойчивости. Соответственно этому

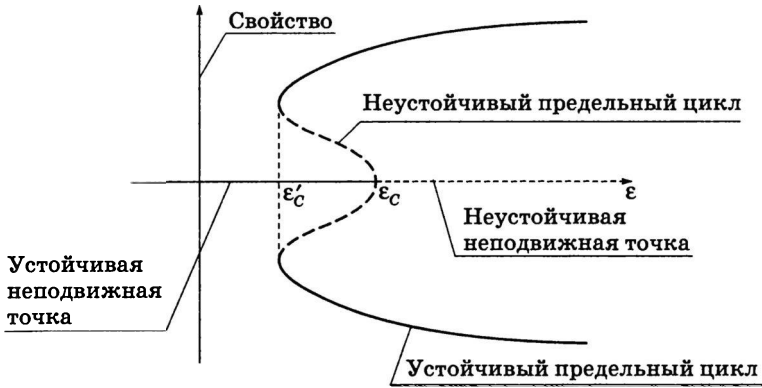


Рис. 20.9

решение не претерпевает резкого преобразования в точке бифуркации, но изменяется постепенно. В общем случае так происходит всякий раз, когда нелинейные члены низшего порядка в точности компенсируют неустойчивость.

В диаметрально противоположной ситуации, когда нелинейные члены стремятся усилить неустойчивость, достаточно, например, изменить знак члена $\theta^2\dot{\theta}$ в уравнении (20.20) и добавить какие-нибудь члены старшего порядка, скажем $\theta^4\dot{\theta}$, чтобы погасить колебания большой амплитуды. То же происходит и с другими уравнениями, что приводит к *субкритической бифуркации*, изображенной схематически на рис. 20.10. В этом случае из-за усиления неустойчивости нелинейностью устойчивое решение всегда находится на конечном расстоянии от решения, которое становится неустойчивым в точке бифуркации. Проходя ось ε справа налево, видим, что ε_c — неустойчивая неподвижная точка — порождает устойчивую неподвижную точку и неустойчивый предельный цикл. Эта бифуркация обратна нормальной

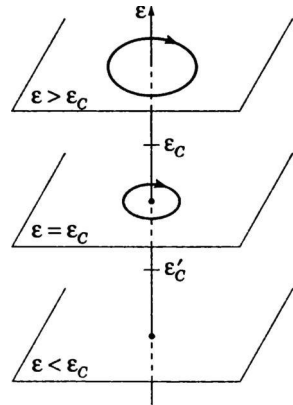


Рис. 20.10

бифуркации, изображенной на рис. 20.9, поэтому она называется **обратной** или **субкритической бифуркацией**. В интервале $[\varepsilon'_C, \varepsilon_C]$ сосуществуют два устойчивых решения: одно стационарное (притягивающая неподвижная точка), другое колебательное, или периодическое (предельный цикл).

С практической точки зрения необходимо подчеркнуть, что эти два решения не наблюдаются одновременно в одной и той же системе, и только начальное решение определяет, какое из них реализуется; устойчивый предельный цикл с самого начала возникает как цикл с конечной амплитудой и исчезает, также имея конечную амплитуду.

Пусть параметр ε сначала изменяется в одну, а затем в другую сторону. В этом случае имеет место явление **гистерезиса**, схематически изображенное на рис. 20.11.

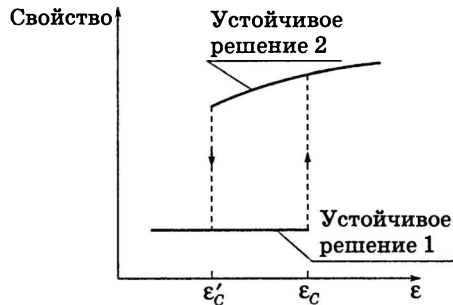


Рис. 20.11

При увеличении бифуркационного параметра переход от неподвижной точки к предельному циклу происходит при $\varepsilon = \varepsilon_C$. Обратный переход при уменьшении ε происходит при $\varepsilon = \varepsilon'_C$. Таким образом, видно, что в отсутствие нейтральной устойчивости колебания с ненулевой амплитудой в точке перехода и гистерезис являются свойствами субкритической бифуркации, качественно отличными от свойств нормальной (суперкритической) бифуркации Хопфа.

21

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ СЕЧЕНИЙ ПУАНКАРЕ

21.1. Определение потока

Эволюция различных динамических систем может быть описана системой n обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dt} X(t) = F(X, t), \quad (21.1)$$

где X — вектор из R^n (фазового пространства); F — векторное поле над этим пространством. Именно такой вид имеют законы, описывающие поведение различных осцилляторов.

Система дифференциальных уравнений типа системы (21.1) называется *поток*ом в R^n . Если F не зависит явно от времени, а зависит только от X ,

$$F = F(X(t)),$$

то поток называется *автономным*. Уравнение (21.1) может служить типичным примером автономного потока. С другой стороны, если F зависит явно от времени, то поток называется *неавтономным*. Примером такого потока может служить уравнение Матье.

* Найти аналитическое выражение для решений уравнения (21.1) удастся лишь в отдельных частных случаях, когда поток интегрируем, однако в большинстве случаев поток неинтегрируем, и приходится исследовать каждое решение, рассматривая соответствующую ему траекторию в фазовом пространстве. Поскольку часто это очень трудно, то используют для этого метод Пуанкаре.

21.2. Сечения Пуанкаре

Построение и свойства. Теоретически не существует никаких ограничений на размерность n фазового пространства. По дидактическим и практическим соображениям рассмотрим только трехмерный случай, уделив внимание только асимптотическому поведению при $t \rightarrow \infty$. Исследование переходных состояний, обладающих значительно меньшей общностью, рассматривать не будем.

Вместо прямого изучения решения системы уравнений (21.1) в R^3 может оказаться полезным рассмотреть точки пересечения траектории с плоскостью. Схематически эта процедура изображена на рис. 21.1. Плоскость S задана уравнением $x_3 = \text{const}$. Отметим точки пересечения, соответствующие заданному направлению эволюции ($\dot{x}_3 < 0$). Высота плоскости выбрана с таким расчетом, что траектория Γ последовательно пересекает S в точках P_0, P_1, P_2, \dots . Динамика в этих точках такова, что x_3 непрерывно переходит с одной стороны плоскости S на другую. В действительности S может быть любой плоскостью, но правильный выбор ее приводит к сечениям, более легко поддающимся анализу. Итак, выходя из начальной точки, получаем множество точек, образующих *сечение Пуанкаре*, т.е. некоторый граф в двух измерениях.

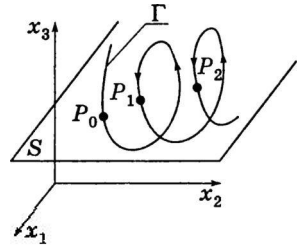


Рис. 21.1

Преобразование, переводящее точку в следующую, является непрерывным отображением плоскости S на себя, называемым *отображением Пуанкаре*:

$$P_{k+1} = T(P_k) = T(T(P_{k-1})) = T^2(P_{k-1}) = \dots \quad (21.2)$$

Так как решение системы (21.1) единственно, то точка P_0 однозначно определяет точку P_1 , которая в свою очередь определяет P_2 и т.д. Если, наоборот, P_1 однозначно определяет

точку P_0 при изменении знака t в уравнениях (21.2), то T — *обратимое отображение* плоскости S на себя.

Заметим, что сечение Пуанкаре заменяет эволюцию с непрерывным временем, описываемую уравнениями (21.1), отображением (21.2) с дискретным временем. Если не считать особых (но тем не менее интересных) случаев, то интервал времени между последовательными точками непостоянен.

Наконец, подчеркнем, что по построению сечение Пуанкаре и отображение Пуанкаре обладают топологическими свойствами того же рода, что и породивший их поток. Например, если поток (21.1) диссипативен и объемы в фазовом пространстве сжимаются, то отображение T сокращает площади на плоскости S . Наоборот, отображение T сохраняет площади, если поток (21.1) консервативен, или гамильтонов. Аналогично, если у потока имеется аттрактор, то его структурные характеристики могут быть найдены в сечении Пуанкаре.

Практическая польза метода сечений Пуанкаре. Метод сечений Пуанкаре упрощает исследование непрерывных потоков по трем причинам. Во-первых, можно перейти от потока в R^3 к отображению на плоскости, понизив тем самым число координат на единицу. Во-вторых, время дискретизируется и дифференциальные уравнения заменяются разностными уравнениями, определяющими отображение Пуанкаре $P \rightarrow T(P)$. Эти алгебраические уравнения значительно легче поддаются решению. Наконец, в-третьих, резко сокращается число данных, подлежащих обработке, так как почти всеми точками на траектории можно пренебречь. Покажем теперь преимущества этих упрощений.

Основное преимущество — на уровне математического моделирования. Итерация отображения

$$x_i(k+1) = T(x_i(k)), \quad i = 1, 2,$$

осуществляется несравненно легче, чем интегрирование такого потока, как (21.1), если говорить о времени вычислений и необходимой производительности компьютера. Следовательно,

итерированные отображения позволяют апробировать адекватность модели ценой меньших затрат.

Помимо упрощения математического моделирования, в трехмерном пространстве можно изображать траектории либо только в перспективе, либо в проекции. И в том и в другом случае трудно получить представление об их расположении в пространстве. Сечение Пуанкаре траекторий быстро позволяет это сделать.

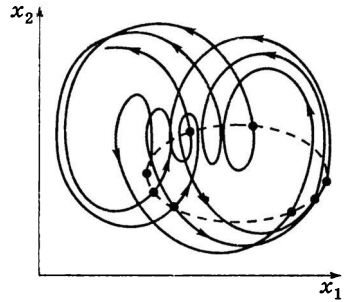


Рис. 21.2

На рис. 21.2 изображена часть траектории в трехмерном пространстве, спроецированная на плоскость (x_1, x_2) . Многооборотная кривая с самопересечениями не много говорит о динамике системы (за исключением того, что динамика сложная). Но стоит лишь провести сечение Пуанкаре (на рис. 21.2 изображено штриховой линией), как тотчас же становится ясно, что эта траектория, по-видимому, лежит на торе T^2 , который, как известно, является *аттрактором режима с двумя периодами*.

Сечение Пуанкаре может характеризовать трехмерный поток и по-другому. Точки сечения Пуанкаре могут быть расположены более или менее сложным образом на кривой или распределены по поверхности, как на рис. 21.3. На рис. 21.3, *а* приведено сечение Пуанкаре для квазипериодического режима, на рис. 21.3, *б* — для хаотического. Во втором случае можно заключить с полной уверенностью, что поток аperiodический. Если же сечение Пуанкаре выглядит как кривая, то имеем дело с динамическим режимом, который либо квазипериодический, либо аperiodический с сильным сжатием.



Рис. 21.3

Действительно, если сокращение площадей в фазовом пространстве происходит очень быстро, то протяженность в «бокковом» направлении (т.е. в направлении сжатия) сечения Пуанкаре становится пренебрежимо малой. Для того чтобы определить истинный характер потока, необходим более подробный анализ.

21.3. Различные типы сечений Пуанкаре

Периодическое решение. Исследуем соответствие между видом сечения Пуанкаре аттрактора и динамическими свойствами решения. Если решение периодическое, то фазовая траектория представляет собой замкнутую орбиту — предельный цикл. Соответствующее сечение Пуанкаре устроено очень просто: это либо одна точка P_0 (рис. 21.4), либо несколько точек, если предельный цикл очень извилист. Точка P_0 является неподвижной точкой отображения T , так как

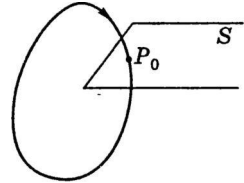


Рис. 21.4

$$P_0 = T(P_0) = T^2(P_0) = \dots$$

Это свойство позволяет исследовать устойчивость периодического решения.

Исследуем устойчивость замкнутой траектории относительно бесконечно малых возмущений. В этом случае достаточен линейный анализ устойчивости, ограниченный членами первого порядка по возмущению. Отображение Пуанкаре (в первом порядке теории возмущений) описывается матрицей M , определенной в окрестности точки P_0 как

$$M = \left[\frac{\partial T}{\partial x_i} \right]_{x_i^0}, \quad i = 1, 2.$$

Эта матрица, называемая *матрицей Флоке*, обладает тем свойством, что после одной петли (одного периода) образ точки

$P_0 + \delta$, выбранной очень близко к точке P_0 , находится на расстоянии

$$T(P_0 + \delta) - P_0 \approx M\delta, \quad \|\delta\| \rightarrow 0.$$

Устойчивость траектории определяется собственными значениями матрицы M . В самом деле, через m периодов имеем

$$T^m(P_0 + \delta) - P_0 \approx M^m \delta,$$

т.е. начальное отклонение увеличивается в M^m раз. В результате смещение экспоненциально убывает со временем, если все собственные значения матрицы M по абсолютной величине меньше единицы, т.е. если все собственные значения лежат внутри единичной окружности на комплексной плоскости. В этом случае периодическая траектория линейно устойчива, так как любое смещение из неподвижной точки стремится к уменьшению. В противоположном случае, когда по крайней мере одно собственное значение матрицы M по абсолютной величине больше единицы, смещение растет со временем по экспоненте — предельный цикл неустойчив. Экспоненциальный рост продолжается не бесконечно, но ограничивается нелинейными эффектами, которые не принимаются во внимание в линейном анализе.

Квазипериодическое решение. В случае двоякопериодического решения с двумя основными частотами f_1 и f_2 известно, что аттрактором является тор T^2 , который может быть проведен в R^3 . Любую траекторию на поверхности тора можно рассматривать как суперпозицию двух движений: если x, y, z — координаты в фазовом пространстве R^3 , то одно из возможных параметрических представлений траектории имеет вид

$$x = a_1 \sin(2\pi f_1 t + \alpha_1) + a_2 \sin(2\pi f_2 t + \alpha_2),$$

$$y = b_1 \sin(2\pi f_1 t + \beta_1) + b_2 \sin(2\pi f_2 t + \beta_2),$$

$$z = c_1 \sin(2\pi f_1 t + \gamma_1) + c_2 \sin(2\pi f_2 t + \gamma_2),$$

где $a_i, b_i, c_i, \alpha_i, \beta_i$ и γ_i — вещественные константы; f_1 и f_2 — две частоты движения.

В этом частном случае движение представляет собой просто сумму двух периодических движений. В общем случае суперпозиция двух частот имеет более сложный вид: вращение по большей окружности (параллелям) и вращение вокруг «цилиндра», образующего тор T_2 (рис. 21.5). Каждая из основных частот f_1 и f_2 соответствует этим вращательным движениям. Точки пересечения траектории с плоскостью сечения S возникают через регулярные интервалы времени, равные периоду первого движения (в данном примере $T_1 = 1/f_1$). Точки пересечения расположены на замкнутой кривой C , форма которой может быть:

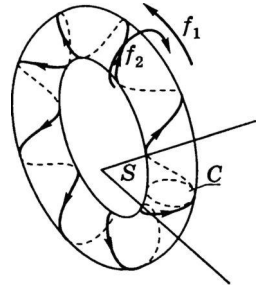


Рис. 21.5

1) простой, т.е. без точек самопересечения (окружность, эллипс и т.д.);

2) сложной (восьмерка, циклоида и т.д.) при наличии гармоник с частотами f_1 и f_2 .

Точная форма сечения Пуанкаре зависит от отношения f_1/f_2 . Если оно иррационально, то траектория не замыкается и всюду плотно покрывает поверхность тора. В этом случае говорят, что частоты f_1 и f_2 *несоизмеримы*. Замкнутая кривая C непрерывна.

Так как каждая из точек кривой C есть образ некоторой другой точки кривой под действием преобразования T , кривая C инвариантна относительно отображения T :

$$T(C) = C.$$

Хотя кривая C непрерывна, последовательные точки пересечения траектории с плоскостью S не покрывают ее сплошь. Наоборот, отображение T соответствует сдвигу вдоль C на конечный интервал.

Если отношение f_1/f_2 рационально, то сечение Пуанкаре состоит из конечного множества точек, распределенных по C . Однако на этот раз C — уже не непрерывная кривая, так как траектория уже не образует всюду плотного покрытия на торе.

Между f_1 и f_2 возникает затягивание частоты: отношение f_1/f_2 равно отношению двух целых чисел n_1 и n_2 . Завершив n_1 оборотов по «параллелям» и n_2 оборотов по «меридианам», траектория замыкается. Следовательно, в действительности имеем дело с периодическим решением [периодом $T = (n_1/f_1) = (n_2/f_2)$]. Сечение Пуанкаре содержит только n_1 точек, таких, что

$$P_i = T^{n_1}(P_i).$$

На рис. 21.6 представлено сечение Пуанкаре для квазипериодического режима с двумя частотами f_1 и f_2 : a — отношение f_1/f_2 иррационально; b — отношение f_1/f_2 рационально (в данном случае $f_1/f_2 = 3/5$). Индекс указывает, в каком порядке траектория проходит точки P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 .

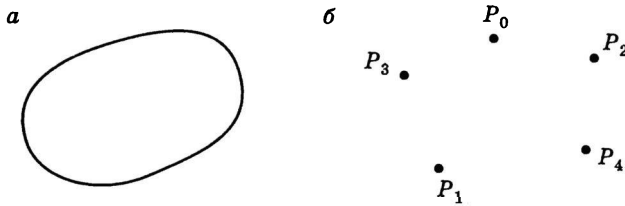


Рис. 21.6

Апериодическое решение. Чтобы понять, как выглядит сечение Пуанкаре апериодического решения трехмерного потока, очень важно разобраться в слоистой структуре странных аттракторов. Этот вопрос будет рассмотрен в гл. 23, посвященной описанию сложных аттракторов. Напомним, что, когда поток сильно диссипативен, это приводит к быстрому сокращению площадей, его сечение Пуанкаре *практически* можно рассматривать как множество точек, распределенных вдоль некоторой кривой (отрезка прямой, дуги кривой и т.д.). В этом случае можно определить координату x для каждой точки на кривой и исследовать, как изменяется x со временем. Отображение Пуанкаре на таком одномерном графике называется *отображением первого возвращения*. Следовательно, естест-

венным обобщением исследования сечения Пуанкаре является анализ отображения первого возвращения, т.е. итерации

$$x_{k+1} = f(x_k),$$

выражающей зависимость между координатами текущей и предшествующей точек.

21.4. Отображение первого возвращения

Одномерные нелинейные отображения вида

$$x_{k+1} = f(x_k)$$

могут порождать хаотическое поведение. Рассмотрим, как используются отображения первого возвращения.

Итерация одномерного отображения. Классическими средствами исследования одномерного отображения являются графики на плоскости (x_k, x_{k+1}) функции f — $x_{k+1} = f(x_k)$ и тождественного отображения $x_{k+1} = x_k$. Чтобы продемонстрировать этот метод, в качестве примера выберем нелинейное отображение $x_{k+1} = 4\mu x_k(1 - x_k)$, $x_k \in [0, 1]$.

График функции $f(x) = 4\mu x(1 - x)$ при заданном значении μ , заключенном между 0,25 и 0,75 (на рис. 21.7 $\mu = 0,7$), имеет два нуля (при $x = 0$ и $x = 1$) и максимум, равный μ , в точке $x = 0,5$. Используя этот график, исследуем заданную выше итерацию с начального условия x_0 . Первая итерация $x_1 = f(x_0)$ есть точка пересечения вертикали с абсциссой x_0 и графика функции f (см. рис. 21.7). Аналогично вторая итерация $x_2 = f(x_1)$ расположена на пересечении вертикали с абсциссой x_1 и графика функции f и т.д.

Простой и эффективный метод построения последовательных итераций состоит в использовании тождественного отображения, или диагонали, $x_{k+1} = x_k$. Действительно, горизонталь $x_{k+1} = x_1$ пересекает диагональ $x_{k+1} = x_k$ в точке $x_{k+1} = x_1$. Следовательно, достаточно провести вертикаль через эту точку, не обращаясь к оси абсцисс.

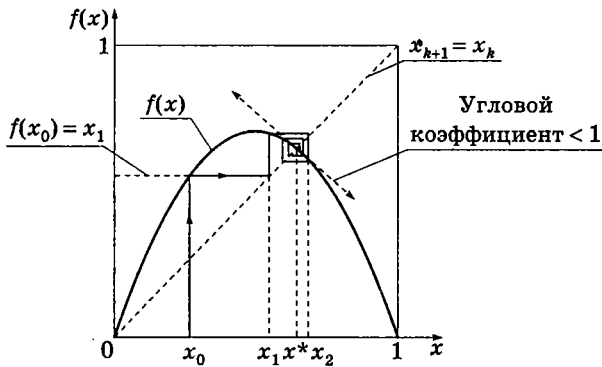


Рис. 21.7

Таким образом, повторяя последовательность операций:

1) проведение вертикали от диагонали до пересечения с графиком функции $f(x)$;

2) проведение горизонтали из полученной точки до пересечения с диагональю, получаем последовательные итерации отображения. Из рис. 21.7 видно, что итерации сходятся к точке с абсциссой x^* — пересечению диагонали с графиком функции f . Легко убедиться в том, что при любом начальном условии x_0 , кроме концевых точек интервала 0 и 1, итерации функции f сходятся к x^* . Ясно, что любая точка пересечения графика функции $f(x)$ с диагональю (графиком тождественного отображения) является итерацией самой себя; это **неподвижная точка** отображения f . Именно с такой ситуацией встречаемся при рассмотрении начала координат: выбирая $x_0 = 0$, получаем $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ и т.д. Но при значении x_0 , сколь угодно близком, но не равном нулю, итерации сходятся к x^* . Это означает, что любое смещение из начала координат, каким бы малым оно ни было, увеличивается при итерациях. Точка, находящаяся на малом расстоянии от начала координат, движется от этой неподвижной точки, которая называется **неустойчивой**. В отличие от нее неподвижная особая точка x^* , к которой сходятся итерации при любом начальном условии из $(0, 1)$, является **устойчивой неподвижной точкой**.

Существует критерий, позволяющий определять устойчивость или неустойчивость неподвижной точки без громоздких вычислений. Графическое построение показывает, что если тангенс угла наклона касательной к кривой $f(x)$ по абсолютной величине больше единицы, то неподвижная точка неустойчива: именно так обстоит дело с началом координат на рис. 21.7. Но если тангенс угла наклона касательной к кривой f по абсолютной величине меньше единицы, то итерации сходятся к неподвижной точке — так обстоит дело с неподвижной точкой x^* .

Результаты относительно существования и устойчивости неподвижной точки одномерного отображения справедливы не только для квадратичной функции, выбранной в качестве иллюстрации, но и для более общих отображений.

Предельный цикл осциллятора Ван-дер-Поля. Теперь можно установить результат существования устойчивого периодического решения уравнения (20.12) при $\epsilon > 0$. Это уравнение определяет поток на плоскости с прямоугольными координатами $(\theta, \dot{\theta})$. Как было сказано ранее, фазовые траектории имеют форму спиралей, раскручивающихся из начала координат и сходящихся вдали от него.

Рассмотрим на фазовой плоскости луч, исходящий из начала координат, и его пересечения с траекториями, начинающимися в точках P_0 и P'_0 (рис. 21.8). образом точки P_0 служит точка P_1 , образом точки P'_0 — точка P'_1 . Поступая таким образом, мы в действительности строим сечение Пуанкаре в \mathcal{R}^2 ; в данном случае «плоскость» сечения вырождается в полупрямую, или луч.

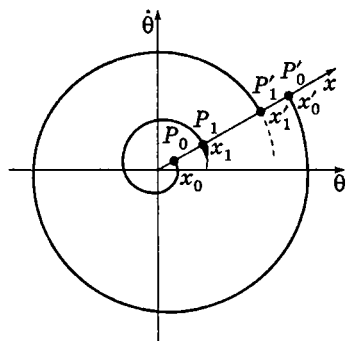


Рис. 21.8

Каждой точке на луче можно поставить в соответствие координату x , измеряющую расстояние от этой точки до начала координат (т.е. радиус окружности, проходящей через эту точку на плоскости $(\theta, \dot{\theta})$). Зададим функцию $x \rightarrow f(x)$, сопоставляющую каждой точке на луче

другую точку, именно точку первого пересечения луча с траекторией, выходящей из точки x . Такая функция f обладает легко проверяемыми важными свойствами:

1) f однозначно определена, т.е. f отображает каждую точку луча в другую (одну и только одну) точку луча;

2) f непрерывна;

3) в окрестности начала координат тангенс угла наклона касательной к кривой f больше единицы (в противном случае имели бы в этой области неравенство $f(x) < x$, поэтому последовательность итераций сходилась бы к началу координат, а это противоречит утверждению о том, что траектории расходятся);

$$x_1 = f(x_0) < x_0,$$

$$x_2 = f(x_1) < x_1 < x_0,$$

.....;

4) при больших x тангенс угла наклона касательной к кривой f меньше единицы (сходящиеся спирали);

5) f — обратимая функция, а тангенс угла наклона касательной к ее графику всюду имеет один и тот же знак (положительный). Действительно, можно единственным образом «вернуться обратно» вдоль траектории. Следовательно, каждому значению $f(x)$ соответствует одно и только одно значение x .

Если учесть все эти свойства, то простейшая форма графика функции f изображена на рис. 21.9. Так как f — непрерывная функция, существует по крайней мере одно (как показывают вычисления, для уравнения Ван-дер-Поля существует только одна неподвижная точка) положительное значение x_0 , при котором график функции f пересекается с графиком тождественного отображения:

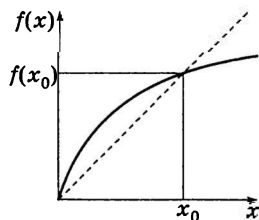


Рис. 21.9

$$f(x_0) = x_0.$$

Следовательно, отображение первого возвращения в сечении Пуанкаре имеет неподвижную точку. Это означает, что поток, из которого возникает сечение Пуанкаре, должен иметь предельный цикл. В силу условия $|df/dx|_{x_0} < 1$ неподвижная точка x_0 является аттрактором. Следовательно, периодическое решение устойчиво.

Редукция трехмерного потока. Некоторые (но отнюдь не все) трехмерные потоки могут быть сведены к отображениям меньшей размерности. В качестве примера рассмотрим следующий поток, предложенный Ресслером:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z, \\ \dot{y} = x + ay, \\ \dot{z} = b + xz - cz, \end{cases} \quad (21.3)$$

где x , y и z — переменные; a , b и c — параметры, значения которых требуется выбрать. При некоторых значениях параметров (например, при $a = b = 0,2$; $c = 5,7$) решения уравнений (21.3) обнаруживают аперiodическое или хаотическое поведение. Среди многих возможных сечений Пуанкаре существует одно, которое особенно просто реализуемо на практике, а именно сечение, соответствующее плоскости, определяемой уравнением

$$y + z = 0.$$

Первое из уравнений (21.3) показывает, что переменная достигает в этом сечении максимума, так как $\dot{x} = 0$. Численно интегрируя уравнения (21.3), можно получать значение x каждый раз, когда эта переменная достигает экстремума определенного типа, например максимума.

Пусть x_k — последовательность таких значений. Априори не существует причины, по которой между двумя последовательными значениями не могло бы существовать какое-нибудь соотношение. Но если построить график зависимости x_{k+1} от предыдущего значения x_k , то получится результат, изображенный на рис. 21.10: вместо того чтобы рассеяться по всей плоскости, точки укладываются на кривую с «максимумом». В этой

связи можно сделать два замечания. Во-первых, не вызывает сомнений тесная связь между потоком (21.3) и кривой на рис. 21.10. Следовательно, исследуя только отображение первого возвращения и не анализируя полностью поток, можно прийти к некоторым выводам о потоке. Сведение трехмерного потока к отображению на интервале позволяет достичь существенного упрощения. Во-вторых, сравнительно простое детерминистское описание (21.3) может порождать поведение, не обладающее никакой видимой регулярностью. Изменение во времени переменных $x(t)$, $y(t)$, $r(t)$ представляется совершенно некоррелированным (рис. 21.11), тогда как закон, определяющий это изменение [поток (21.3)], совершенно регулярен.

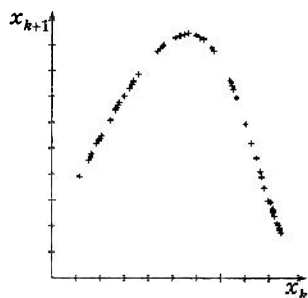


Рис. 21.10

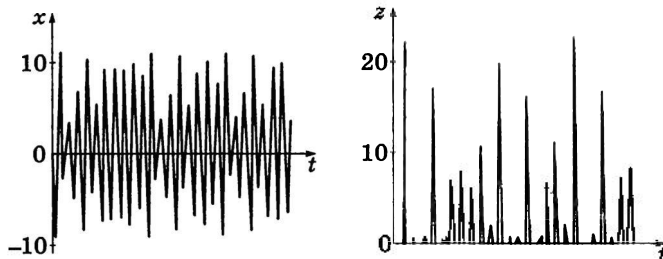


Рис. 21.11

Такой вывод подтверждается сечением Пуанкаре, а также анализом Фурье. Здесь имеет место вопрос о существовании детерминированного хаоса в поведении системы.

21.5. Практическая реализация

Изложенные выше соображения относительно метода Пуанкаре предполагают знание фазового пространства исследуемой динамической системы. Однако на практике никогда, по

крайней мере в экспериментальных исследованиях реальных систем, подобной информацией не располагают. Чаще всего приходится ограничиваться измерением изменений лишь одного свойства, связанного более или менее сложной зависимостью с одной из независимых переменных соответствующей задачи (а иногда и с несколькими переменными).

Можно ли сделать вывод о том, что метод Пуанкаре применим только для численного моделирования потоков типа (21.3) и не может быть использован для исследования поведения реальных систем? Нельзя, по крайней мере если число степеней свободы остается малым, как в случае тех систем, которые здесь рассмотрены в данном параграфе. Если каждая из переменных достаточно хорошо отражает общее поведение, то это позволяет проводить полный анализ. Отсюда напрашивается гипотеза: по-видимому, возможно восстановить топологию аттрактора исходя из наблюдений только величины $x(t)$ и выбирая в качестве фазового пространства либо $x(t)$, $x(t + \tau)$, $x(t + 2\tau)$, ..., либо $x(t)$, $\dot{x}(t)$, $\ddot{x}(t)$, Иначе говоря, можно считать, что функция $x(t)$ не зависит от значений, принимаемых ею же в более поздний момент времени $x(t + \tau)$, где τ — произвольная постоянная, называемая *запаздыванием*.

Можно поступить по-другому и рассматривать функцию $X(t)$ и ее производную по времени $\dot{X}(t)$ как независимые величины. Сказанное не означает, будто аттрактор, получаемый в новом пространстве, тождествен аттрактору в исходном фазовом пространстве. Можно лишь утверждать, что новое представление аттрактора сохраняет основные топологические свойства первого и этого может оказаться достаточно для исследования существенных характеристик исходного аттрактора.

В случае простого аттрактора (неподвижной точки или предельного цикла) топологическая эквивалентность почти очевидна, однако она отнюдь не очевидна для более сложного аттрактора (тора) или странного аттрактора, а именно такие аттракторы и будем рассматривать. Поскольку точных границ области топологической эквивалентности двух представлений не существует, полезно обратиться к примеру.

Для потока (21.3) численное интегрирование позволяет получить все переменные

$$x(t), y(t), z(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t), \ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t).$$

С этого момента и впредь можно сравнивать характеристики аттрактора в фазовом пространстве (x, y, z) с его характеристиками в любом другом представлении. На рис. 21.12 сравнивается проекция фазовых траекторий потока Ресслера на плоскость (x, y) (рис. 21.12, а) с проекцией на плоскость (x, \dot{x}) (рис. 21.12, б) траекторий в пространстве (x, \dot{x}, \ddot{x}) . Для уравнений Ресслера соотношения, позволяющие совершить переход от координат (x, \dot{x}, \ddot{x}) к координатам (x, y, z) исходного фазового пространства, таковы:

$$\begin{aligned} x &= x, \\ y &= -\frac{\ddot{x} + (c - 2a - x)\dot{x} + x + b}{c - a - x}, \\ z &= \frac{\ddot{x} - a\dot{x} + x + b}{c - a - x}. \end{aligned}$$

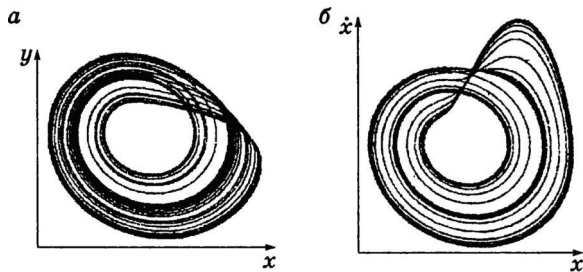


Рис. 21.12

Формально замена переменных $(x, y, z) \rightarrow (x, \dot{x}, \ddot{x})$ представляет собой криволинейное преобразование координат в фазовом пространстве. При естественных предположениях о непрерывности преобразование подобного рода сохраняет топологию таких объектов, как аттракторы потоков.

Сходство топологий этих двух кривых очевидно. Кроме того, наибольшие показатели Ляпунова (показатель Ляпунова служит мерой средней скорости расхождения двух траекторий) также дают хорошее количественное согласие: значения, вычисленные в двух представлениях, различаются менее чем на 1 %.

Остается практически осуществить процедуру. Один из методов состоит в численной обработке функции $x(t)$ для определения $x(t + \tau)$ или $\dot{x}(t)$. Если функция хранится в памяти компьютера, то такая обработка производится без труда. Обработать функции можно и с помощью аналогового электронного устройства, т.е. в каждый момент времени определять величину $x(t)$ и ее производную $\dot{x}(t)$. Иногда эксперимент планируют с таким расчетом, чтобы измерение функции в двух различных специально выбранных точках системы соответствовало временной задержке между двумя однопериодными сигналами. Все трудности существенно уменьшаются, когда две независимые величины удается измерить одновременно. Таким образом, видим, что у экспериментатора имеется достаточно широкий выбор методов.

Наконец, заметим, что для сигнала периодичностью T (периодического и в особенности квазипериодического) простой способ построения сечения Пуанкаре состоит в измерении значений сигнала в моменты времени $T, 2T, \dots, nT$. Так как T в точности временной интервал, необходимый для завершения одного цикла на аттракторе (предельном цикле или торе), то по существу стробоскопируется сигнал. Поскольку эта задача легко выполнима, стробоскопические методы часто используются для идентификации и исследования квазипериодических решений. Метод стробоскопирования равным образом применим и к анализу систем с периодической вынуждающей силой. В этом случае частота вынуждающего воздействия задает естественный интервал для стробоскопической выборки значений сигнала.

Асимптотическое поведение

22.1. ДИССИПАТИВНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Большинство понятий и идей, необходимых для описания и понимания нестационарного поведения динамических систем, было введено и изложено в первых главах нелинейной динамики. Остановимся на наиболее существенных моментах. Проанализируем эволюцию произвольных диссипативных систем. Эти системы по предположению детерминированные, так как описываются с помощью либо непрерывного автономного потока

$$\frac{d}{dt} X(t) = F(X(t)),$$

либо отображением с дискретным временем

$$x_{k+1} = f(x_k),$$

где X — вектор из R^m ($m \geq 0$). Функция F содержит один или несколько управляющих параметров μ , выражающих связи, налагаемые внешним воздействием на исследуемую систему. Связью может быть, например, интенсивность магнитного поля, число Рэлея или среднее время пребывания в реакторе. Варьируя управляющий параметр, получаем возможность изменять поведение системы. В ходе измерения управляющий параметр поддерживается (или предполагается) постоянным.

Рассмотрим долговременное поведение диссипативных систем. Предположим, что выполнены некоторые «технические»

условия (в действительности удовлетворить им весьма трудно даже в такой простой модели, как уравнение Ван-дер-Поля), при которых траектории остаются в ограниченном объеме фазового пространства.

Если поток диссипативный, то в этом конечном объеме траектории сходятся к аттрактору — компактному множеству в фазовом пространстве, инвариантному относительно потока или отображения. Сам аттрактор имеет нулевой объем, но его область притяжения — конечный или даже бесконечный объем. *Область притяжения* определяем как множество начальных условий, такое, что выходящие из него траектории сходятся к аттрактору. Поток может иметь несколько различных аттракторов, у каждого из которых своя область притяжения. Построены отображения, имеющие бесконечное (счетное) множество аттракторов. Ограничимся рассмотрением случая с одним аттрактором.

Исследование аттрактора означает существенное упрощение, так как можно пренебречь переходными эффектами и сосредоточить внимание на асимптотическом режиме.

Анализ будет состоять из двух частей:

- 1) определения простейших типов аттракторов;
- 2) каталогизации способов перехода между аттракторами.

Цель состоит в том, чтобы понять, как возникают и какими свойствами характеризуются типы временной эволюции, в том числе и режимы, кажущиеся на первый взгляд совершенно беспорядочными.

Типы простейших аттракторов. Кратко рассмотрим три типа аттракторов, уже описанных ранее, и основные свойства соответствующих динамических режимов.

Аттрактор-точка представляет собой решение, не зависящее от времени, т.е. стационарное состояние. В этом случае нет никаких неясностей, так как система не эволюционирует.

Решение, периодическое по времени, соответствует *предельному циклу*, характеризуемому своей амплитудой и периодом. Спектр Фурье такого решения содержит одну основную частоту и, возможно, некоторое число гармоник (в зависимости от формы колебаний). Решение для потока всегда пред-

ставимо в виде ряда Фурье: если состояние системы в данный момент времени известно, то ее состояние в любой последующий момент времени предсказуемо.

Третьим типом аттрактора, также относительно простым, является *тор* T^r ($r \geq 2$), соответствующий квазипериодическому режиму с r независимыми основными частотами. В этом случае спектр Фурье также состоит из множества линий, частоты которых являются линейными комбинациями основных частот. Хотя решение для потока, вообще говоря, не представимо в виде обычного ряда Фурье, можно исходя из начального состояния вычислить состояние системы в любой последующий момент времени.

Определение хаоса. Поскольку строгого научного определения терминов «хаос» и «хаотический» не существует, будем считать их синонимами некоторых типичных свойств. Условимся называть динамический режим хаотическим, если его спектр мощности содержит непрерывную часть (широкую полосу) независимо от возможного наличия пиков. Можно также воспользоваться следующим критерием: автокорреляционная функция временной функции должна иметь конечный носитель, т.е. обращаться в нуль вне конечного интервала времени. И в том и в другом случае в основе лежит одно и то же понятие — *потеря функций памяти о самой себе*. Это означает, что знание состояния системы в течение сколь угодно продолжительного интервала времени не позволяет предсказывать дальнейшую эволюцию системы. Тем самым признается непредсказуемость, т.е. то качество, которое определяет хаос. Такое определение хаоса чисто прагматическое; ему недостает строгости и оно неизбежно таит в себе неоднозначность. Между предсказуемостью и непредсказуемостью не существует четкой границы, поэтому остаются открытыми такие вопросы:

1. В каком масштабе времени должен быть предсказуемым поток?
2. Насколько точным должно быть предсказание?
3. Допустимо ли статистическое предсказание?

Различие между теоретической и практической невозможностью предсказания также проблематично.

Странные аттракторы. Рюэль и Такенс в 1971 г. ввели аттракторы, топологически отличные от тора и названные *странными аттракторами*, и показали, что такие аттракторы играют важную роль в решении физических проблем, в том числе и в гидродинамической турбулентности. Термин «странный аттрактор» указывает на необычные свойства таких аттракторов, из которых наиболее важным является чувствительная зависимость от начальных условий (ЧЗНУ). Вследствие ЧЗНУ любые две первоначально близкие траектории на аттракторе в конце концов расходятся. Более того, расхождение траекторий (усредненное по коротким интервалам времени) возрастает со временем экспоненциально.

На рис. 22.1 схематически иллюстрируется свойство ЧЗНУ. На странном аттракторе две соседние траектории, первоначально почти неразличимые, всегда расходятся независимо от того, как близки они были первоначально. Обращение в нуль автокорреляционной функции, широкополосный спектр Фурье и внутренняя непредсказуемость системы — все это следствия ЧЗНУ. В частности, ясно, что малейшая ошибка или неточность в задании начального условия не позволит решить, по какой траектории пойдет эволюция системы, и вынудит ограничиться статистическим предсказанием долгосрочного будущего системы. Таким образом, приходим к выводу о непредсказуемости поведения некоторых детерминированных потоков всего лишь с тремя степенями свободы. Рассмотрим эти вопросы подробнее.

Пути возникновения хаоса. Само по себе понятие странного аттрактора не решает проблемы, поскольку возникает вопрос,

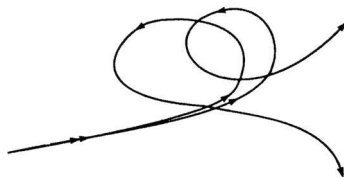


Рис. 22.1

как появляется странный аттрактор, т.е. устанавливается хаотический режим. Какими маршрутами переходит динамическая система от регулярного режима к хаотическому? Чтобы ответить на эти вопросы, необходимо перечислить различные возможные переходы между аттракторами — задача столь же необходимая, как и идентификация аттракторов.

Многие динамические системы имеют тенденцию к переходу в периодический режим независимо от других характеристик этих систем. Сама по себе такая тенденция отнюдь не очевидна. Хотя периодичность далеко не исчерпывает всех возможностей, первый шаг к ответу на поставленный выше вопрос состоит в выяснении условий, при которых периодический режим теряет устойчивость. Рассмотрим два метода: во-первых, теорию Флоке линейной устойчивости периодических решений и, во-вторых, анализ нелинейных эффектов, которые могут ограничить рост неустойчивости.

22.2. Теория Флоке

Рассмотрим нелинейный автономный поток в n -мерном фазовом пространстве, допускающий периодическое решение с периодом T :

$$X(t+T) = X(t).$$

Чтобы определить, устойчиво или неустойчиво решение, достаточно выяснить, как будет развиваться со временем малое начальное возмущение δX решения. Линеаризуя поток относительно периодической траектории, обнаруживаем, что начальное условие $X_0 + \delta X$, где δX — бесконечно малое возмущение, отображается в конце периода T в вектор $X_0 + M\delta X$, где M — матрица $n \times n$, называемая *матрицей Флоке*. Таким образом, проблема линейной устойчивости периодического решения сводится к исследованию собственных значений матрицы M .

Прежде всего заметим, что эта матрица всегда имеет одно собственное значение, равное единице; оно соответствует сме-

щению δX вдоль траектории. Это означает, что, оставаясь на предельном цикле, в конце периода можно в точности возвратиться в исходную точку — тривиальное заключение о периодическом решении, из которого ничего не узнать об устойчивости этого решения. Что действительно требуется, так это выяснить, как ведут себя возмущения в направлениях, перпендикулярных траектории, как на рис 22.2. Интуитивно ясно, что если собственные значения матрицы M зависят от вида предельного цикла, то они не зависят от выбранной на предельном цикле начальной точки X_0 . Так как через период вектор $X_0 + \delta X$ отображается в $X_0 + M\delta X$, решение линейно устойчиво, если все собственные значения матрицы M расположены внутри единичной окружности D на комплексной плоскости (рис. 22.3). В этом случае все компоненты вектора δX , перпендикулярного предельному циклу, с каждым периодом уменьшаются. С другой стороны, если одно из собственных значений матрицы M лежит вне D , то δX непрерывно растет по крайней мере в одном направлении: траектория все дальше и дальше отклоняется от предельного цикла, который поэтому неустойчив.

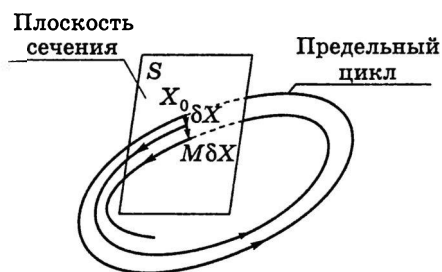


Рис. 22.2

При непрерывном изменении параметра μ периодическое решение постепенно изменяется; то же справедливо и относительно матрицы M и ее собственных значений. Каждому из собственных значений на комплексной плоскости соответствует кривая, параметризованная величиной μ . Потеря устойчивости периодическим решением сопровождается бифурка-

цией и происходит тогда, когда одна из этих кривых при изменении параметра μ выходит из единичной окружности. В случае потока в R^2 собственное значение может выйти из единичной окружности через точку $+1$, так как траектория не может самопересекаться. Два других варианта пересечения единичной окружности возможны только при $m \geq 3$.

Существуют три генерических типа («генерический тип» здесь означает, что при малом изменении решения, например при изменении второго управляющего параметра μ' , характер пересечения не изменяется) пересечения единичной окружности (рис. 22.3): в точке $+1$, в точке -1 и в двух комплексно-сопряженных собственных значениях $\alpha \pm i\beta$. Помимо потери устойчивости, каждый из трех типов пересечения по-своему сказывается на последующем поведении системы в зависимости от нелинейности и типа соответствующих бифуркаций.

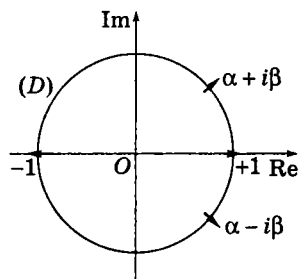


Рис. 22.3

Переходы при потере линейной устойчивости. При пересечении единичной окружности в точке $+1$ возникает бифуркация «*седло—узел*». Периодическое решение не только становится неустойчивым, но и полностью исчезает. В области параметра чуть выше порога бифуркации система переходит в режим, который называется *пережимаемостью I типа*. Он характеризуется фазами регулярного, почти периодического поведения (ламинарные фазы), время от времени прерываемого фазами беспорядочного, «анархического» поведения (турбулентные всплески фазы).

Если собственное значение выходит из единичной окружности в точке -1 , то бифуркация называется *субгармонической* и может быть либо суперкритической, либо обратной. В случае суперкритической субгармонической бифуркации новое устойчивое периодическое решение с удвоенным периодом заменяет старое решение, которое становится неустойчивым. Удвоение периода повторяется всякий раз, когда возникает

новое периодическое решение, что приводит к бесконечной последовательности бифуркаций, заканчивающейся хаосом и называемой *субгармоническим каскадом*. С другой стороны, субкритическая бифуркация приводит к *перемежаемости III типа*, которая качественно напоминает перемежаемость I типа: длинные фазы почти периодического поведения, время от времени прерываемые хаотическими всплесками. Однако тип III характеризуется монотонным увеличением амплитуды субгармоники на протяжении почти периодической фазы из-за того, что нелинейные эффекты усиливают субгармоническую неустойчивость предельного цикла. Амплитуда возрастает с каждым колебанием. Когда она превышает некоторое критическое значение, ламинарная фаза прерывается.

Наконец, неустойчивость третьего типа возникает, когда два комплексно-сопряженных собственных значения $\alpha \pm i\beta$ одновременно пересекают единичную окружность — это называется *бифуркацией Хопфа*.

Если бифуркация Хопфа *суперкритическая*, то она приводит к устойчивому аттрактору вблизи предельного цикла, который становится неустойчивым (но все еще существует). Этот аттрактор — тор T^2 , на поверхности которого лежит новое решение, соответствующее квазипериодическому режиму. Вторая суперкритическая бифуркация Хопфа может породить переход $T^2 \rightarrow T^3$, а в результате третьей (иногда после второй) бифуркации возникает странный аттрактор.

Если бифуркация Хопфа *субкритическая*, то может встретиться другое явление, называемое *перемежаемостью II типа*. Глобальные качественные особенности у перемежаемости II типа такие же, как у I и III типов, за исключением того, что неустойчивости, развивающиеся в ламинарных фазах, имеют частоту, не связанную с основной частотой исходного цикла. Новая частота связана с отношением α/β для $\alpha \pm i\beta$ — собственных значений, пересекающих единичную окружность при бифуркации. Динамический процесс, дающий начало новой ламинарной фазе после турбулентного всплеска, слишком сложен, чтобы описывать его здесь, поскольку речь идет о потоке

в шестимерном фазовом пространстве, а это соответствует сечению Пуанкаре в R^5 .

В табл. 22.1 сведены ситуации, описанные выше.

Таблица 22.1

Таблица бифуркаций

Точка пересечения с единичной окружностью	Бифуркация	Явление
+1	«Седло — узел»	Переमेжаемость I типа
-1	Субгармоническая: нормальная обратная	Субгармонический каскад Перемежаемость III типа
$\alpha \pm i\beta$	Хопфа: нормальная обратная	Квазипериодичность Перемежаемость II типа

Современные пределы теорий. Исследование переходов с потерей периодическим решением линейной устойчивости является удобным способом для классификации ряда процессов, приводящих к установлению хаотического режима. Однако следует соблюдать осторожность, и в этой связи можно сделать два замечания.

Во-первых, как уже указывалось, периодическая эволюция является не необходимым условием возникновения хаоса, а всего лишь благоприятным обстоятельством. Необязательность периодического режима убедительно подтверждается на примере модели Лоренца.

Во-вторых, необходимо ясно сознавать ограниченность данной теории в ее современном состоянии. Были перечислены и проанализированы три явления, ведущие к хаосу: квазипериодичность, субгармонический каскад и перемежаемость. Но не были указаны никакие необходимые или достаточные условия, при которых возникают эти явления, на основе характерных особенностей потока.

23

ДИССИПАЦИЯ ЭНЕРГИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ, АТТРАКТОРЫ, ФРАКТАЛЫ. ПЕРЕХОД К ХАОТИЧЕСКОМУ ДВИЖЕНИЮ

23.1. Эффекты притяжения

Диссипативные динамические системы характеризуются притяжением всех траекторий, проходящих через некоторую область фазового пространства, к геометрическому объекту, называемому аттрактором. Примером затухающих колебаний является маятник под действием вынуждающей силы. Энергия, подводимая к маятнику извне, компенсирует затраты энергии за счет диссипации.

Когда колебания маятника достигают амплитуды, при которой энергия, подводимая за один цикл, в точности равна энергии, диссипируемой за один цикл, устанавливается стационарное состояние: режим периодический; амплитуда колебаний постоянна, а траектория в фазовом пространстве представляет собой предельный цикл C (рис. 23.1). В притягивающем характере цикла можно убедиться, слегка сместив систему с предельного цикла. Например, возмущим маятник толчком, придав ему амплитуду θ_1 и скорость $\dot{\theta}_1$, значительно превышающие максимальные значения θ_{\max} и $\dot{\theta}_{\max}$ для предельного цикла. По прошествии некоторого времени диссипация вынудит траекторию быстро приблизиться к предельному циклу C , на котором диссипация

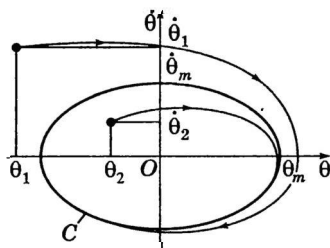


Рис. 23.1

компенсируется подводимой энергией. Аналогично временное торможение маятника, находящегося под действием вынуждающей силы, уменьшит амплитуду его колебаний и скорость до θ_2 и $\dot{\theta}_2$ (см. рис. 23.1), но затем траектория снова приближается к C .

Понятие предельного цикла обобщим следующим образом. В фазовом пространстве решения системы n обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dt} X(t) = F(X(t)), \quad X \in R^n,$$

образуют поток φ , который для диссипативной системы имеет аттрактор. По определению *аттрактором* A называется компактное множество в фазовом пространстве, обладающее следующими свойствами:

- 1) A инвариантен относительно действия потока, т.е. $\varphi A \equiv A$;
- 2) A имеет нулевой объем в n -мерном фазовом пространстве;
- 3) A содержится в области B ненулевого объема, которая является областью притяжения аттрактора.

По определению *областью притяжения* называется множество точек, таких, что выходящие из них траектории при $t \rightarrow \infty$ стремятся к A . На рис. 23.2 траектории, выходящие из начальных точек α , β , γ и δ , переносятся к аттрактору A потоком φ . Таким образом, аттрактор A есть асимптотический предел решений, начальные точки которых принадлежат его области притяжения B . Заметим, что даже если A — простой геометрический объект, то B может иметь очень сложную форму.

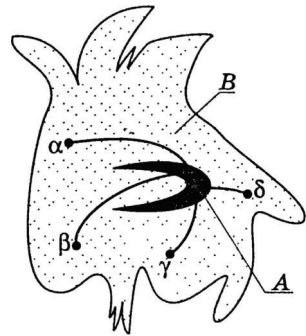


Рис. 23.2

Два следствия из сокращения площадей в фазовом пространстве. Снова рассмотрим пример с предельным циклом, чтобы исследовать две очень важные характеристики притяжения: потерю памяти о начальных условиях и то, что из этого вытекает для размерности аттракторов.

Рассмотрим множество начальных условий на фазовой плоскости $(\theta, \dot{\theta})$, занимающее область размером Γ (рис. 23.3). Вследствие диссипации поток приводит к сокращению площадей. Отсюда поверхность Γ под действием потока вырождается до линейного отрезка на аттракторе C . Следовательно, происходит потеря информации относительно взаимного расположения точек,

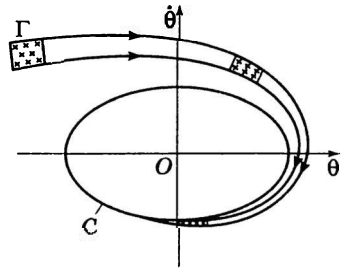


Рис. 23.3

первоначально принадлежавших поверхности Γ ; при достижении аттрактора информация о начальных условиях утрачивается решением необратимо. Этот вывод опирается исключительно на сокращение площадей и одновременное существование аттрактора. Таким образом, вывод остается в силе независимо от типа аттрактора. Именно поэтому информация о начальных условиях теряется и в двоякопериодическом режиме, траектории которого эволюционируют в фазовом пространстве размерностью не меньше трех и стремятся к тору T^2 . Аналогичный вывод справедлив и для аperiодических режимов, и для связанных с ними аттракторов.

Потерю памяти о точных начальных условиях продемонстрируем на примере с маятником. Сначала (т.е. вдали от предельного цикла) для задания состояния динамической системы необходимы две координаты θ и $\dot{\theta}$, поэтому для описания системы требуется двумерное фазовое пространство, или поверхность. После затухания промежуточных режимов и выхода на асимптотический режим остается только одна траектория — кривая C . Для задания точки достаточно одной криволинейной координаты вдоль C . Это иллюстрирует общий принцип: размерность d аттрактора меньше размерности n фазового пространства, т.е. меньше числа степеней свободы динамической системы: $d < n$.

Рассмотрим теперь, к каким количественным следствиям приводит сокращение площадей или, в более общем случае, объемов. Относительная скорость изменения объема V в фазо-

вом пространстве под действием потока, т.е. $(1/V) (dV/dt)$, определяется *производной Ли*:

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \dot{X}_i}{\partial X_i},$$

где X_i — i -я компонента вектора X , $X \in R^n$.

В диссипативных системах эта величина, усредненная по времени, отрицательная и служит мерой скорости сокращения, так как для консервативных, или гамильтоновых, систем объем сохраняется:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \dot{X}_i}{\partial X_i} \equiv 0.$$

Из отрицательности производной Ли следует, что при $t \rightarrow \infty$, после того как траектории достигают аттрактора, любое множество начальных условий объемом V отображается в множество нулевого объема — объем самого аттрактора равен нулю.

В трехмерном пространстве термин «объем» имеет свое обычное значение (элемент пространства R^3). Следовательно, чтобы удовлетворять условию $d < n$, любой аттрактор должен иметь размерность меньше трех.

Условие непересечения фазовых траекторий и периодичности режима колебаний. Траектории динамической системы в фазовом пространстве не могут пересекаться, кроме особых точек, в которых они «сливаются». Это ненадежное следствие детерминированного характера описания. В противном случае одно начальное условие (точка пересечения) порождало бы различные траектории или система по прохождении точки пересечения могла бы вести себя различным образом, т.е. поведение ее было бы неопределенным. Такая неопределенность противоречила бы гипотезе Лапласа детерминированного описания системы конечной совокупностью обыкновенных дифференциальных уравнений.

Выясним, что следует из вышеизложенного для двоякопериодического режима. В этом случае аттрактор имеет вид тора T^2 , который для удобства «развернем» на плоскость. Такая

операция топологически осуществима, поскольку поверхность тора двумерна.

Разворачивание тора состоит из трех этапов, которые изображены на рис. 23.4. На первом этапе разрезаем тор по малой окружности (PC) (рис. 23.4, а), разделяющей области C и C' , и, разгибая, превращаем его в цилиндр. Проводя второй разрез вдоль образующей AA' цилиндра (рис. 23.4, б) и разворачивая еще раз цилиндрическую поверхность, получаем прямоугольник $AA'B'B$. Сторона AB (или $A'B'$) соответствует малой окружности («меридиану») PC на торе, а сторона AA' (или BB') — большой окружности («параллели») GC (см. рис. 23.4, а).

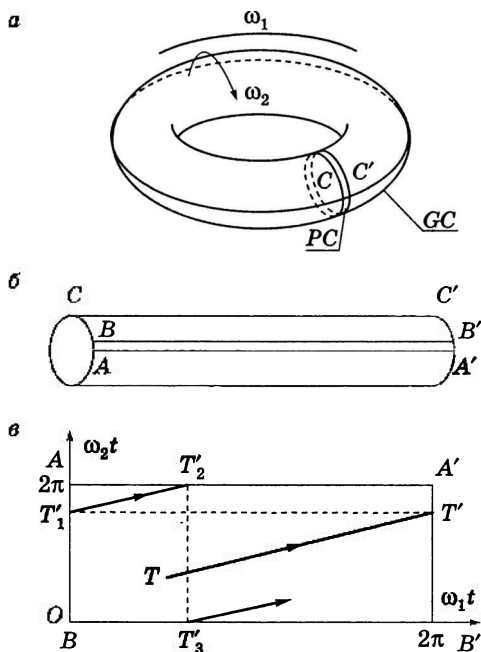


Рис. 23.4

Пусть ω_1 и ω_2 — угловые частоты вращений траекторий соответственно по большим и малым окружностям. Полному обороту по большой окружности на прямоугольной развертке соответствует отрезок, параллельный большей стороне AA'

прямоугольника (при переходе из B в B' фаза изменяется от 0 до 2π). Аналогично отрезок, параллельный меньшей стороне BA прямоугольника, соответствует вращению по малой окружности тора. Вообще любая фазовая траектория на торе представляет собой некоторую комбинацию двух движений, и на прямоугольнике ей соответствует некоторый прямолинейный отрезок, например отрезок TT' (рис. 23.4, *в*). Так как линии AB и $A'B'$ на торе совпадают, поэтому, продолжая траекторию за точку T' , необходимо «перепрыгнуть» в точку T'_1 и из нее провести прямую, параллельную TT' . Аналогично, дойдя до точки T'_2 , необходимо перепрыгнуть в точку T'_3 и т.д. Вся траектория в таком представлении состоит из множества параллельных прямолинейных отрезков.

На рис. 23.5 показан пример траектории, возникающей в случае, когда отношение частот ω_1/ω_2 равно четырем. Из-за периодичности стороны прямоугольника нормированы к отрезку $[0, 2\pi]$. Детерминированность запрещает разбегание траекторий: если две траектории расходятся, то они непременно должны пересечься, как на рис. 23.6, и число точек пересечения со временем возрастает. Следовательно, фазовый портрет такого типа, как на рис. 23.6, исключается.

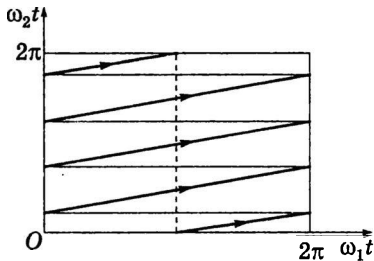


Рис. 23.5

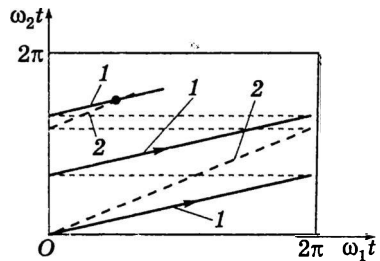


Рис. 23.6

Резюмируя, можно утверждать, что на притягивающем торе T^2 существуют только две возможности. Если отношение ω_1/ω_2 иррационально, то прямолинейные отрезки всюду плотно покрывают прямоугольник (т.е. развертку тора): это двоякопериодический, или квазипериодический, режим. Если же

отношение ω_1/ω_2 рационально, то траектория состоит из конечного числа параллельных прямолинейных отрезков, последовательно проходимых с течением времени, как на рис. 23.5 — режим периодический. Единственный тип, структурный режим, затягивание частоты или синхронизация означают, что отношение частот из иррационального становится рациональным. Следовательно, тор T^2 не может быть аттрактором аperiodического режима.

23.2. Аperiodические аттракторы

Поведение характеристик для случая хаотического режима. В хаотическом режиме спектр мощности $S(\omega)$, где ω — частота $\tau = t_2 - t_1$, одной из переменных X динамической системы содержит непрерывную часть, что соответствует неупорядоченной и хаотической эволюции этой переменной (рис. 23.7, а). Чтобы оценить интенсивность хаоса, введем функцию, служащую мерой сходства значения функции X в момент времени t со значением той же функции в более поздний момент времени $t + \tau$. Функция $R(\tau)$, о которой идет речь, получается путем усреднения большого числа произведений $X(t)X(t + \tau)$:

$$R(\tau) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} X(t)X(t + \tau) dt,$$

или в более сжатых обозначениях

$$R(\tau) = \langle X(t)X(t + \tau) \rangle.$$

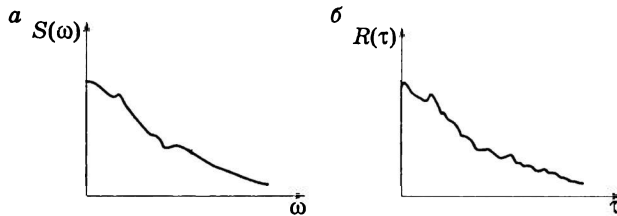


Рис. 23.7

Изменяя интервал τ , строим величину $R(\tau)$, которая называется *временной автокорреляционной функцией*. Известно, что $R(\tau)$ есть преобразование Фурье спектра мощности $S(\omega)$. Если $X(t)$ — константа, периодический или квазипериодический режим, то спектр мощности $S(\omega)$ состоит из отдельных пиков. Следовательно, $R(\tau)$ остается отличной от нуля при $\tau \rightarrow \infty$.

Периодическая (или квазипериодическая) функция обладает сходством с самой собой в более поздние моменты времени. Это означает, что поведение системы предсказуемо, так как, зная ее поведение на достаточно большом интервале времени, можно с помощью простого сравнения построить точный прогноз на все последующие времена. В хаотическом же режиме, в котором спектр мощности обязательно содержит непрерывную часть, автокорреляционная функция $R(\tau)$ стремится к нулю при возрастающем τ (рис. 23.7, б). Автокорреляционная функция имеет конечную протяженность: сходство функции с самой собой со временем ослабевает, а по истечении достаточно продолжительного времени исчезает совсем. Следовательно, наблюдение функции $X(t)$ на любом конечном интервале времени недостаточно для предсказания поведения функции в будущем. Хаотический режим принципиально непредсказуем в силу все возрастающей потери самоподобия.

В 23.1 уже упоминалось о потере памяти о начальных условиях. В действительности это отражает только нечувствительность к начальным условиям и «обеднение» информации, так как многие начальные состояния вне аттрактора, эволюционируя, «оседают» на аттракторе. Когда речь идет о забы-

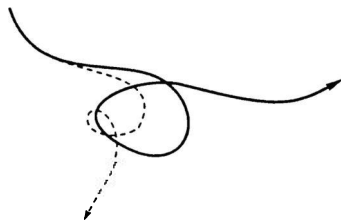


Рис. 23.8

вании начальных условий в хаотическом режиме, под этим понимается то, что множество незначительно различающихся начальных состояний на аттракторе порождает непредсказуемым образом многие конечные состояния. Таким образом, информация не теряется, а в определенном смысле приобретается. В отличие от временной потери информации из-за

притяжения к аттрактору на самом аттракторе происходит непрерывный процесс «производства» информации. Это приводит к решающим последствиям для динамики: две траектории, первоначально близкие, расходятся, что приводит к полной потере всякого сходства за конечное время (рис. 23.8). Наоборот, если режим представлен аттрактором, на котором соседние траектории расходятся, то такой режим хаотический. Это очень важное свойство — усиление (в действительности экспоненциальное усиление) ошибок или неопределенности в начальных данных — хаотического режима называется *чувствительностью к заданию начальных условий* (ЧЗНУ).

Свойства аperiodических аттракторов. Представление об аттракторе с ЧЗНУ содержит двойной парадокс. *Первый парадокс* заключается в кажущемся противоречии между притяжением, которое обуславливает схождение траекторий, и ЧЗНУ, приводящей к расхождению траекторий. В действительности же расхожимость траекторий только устанавливает нижнюю границу размерности аттрактора. По топологическим причинам ЧЗНУ для двумерного аттрактора невозможна: фазовые траектории должны эволюционировать в пространстве, размерность которого не меньше трех.

Для простоты будем рассматривать только трехмерное фазовое пространство. На рис. 23.9 траектории 1 и 2 расходятся на плоскости как раскручивающиеся спирали, затем выходят из плоскости и возвращаются, попадая в центр спирали. Такой процесс повторяется до бесконечности из-за растяжения вследствие ЧЗНУ и складывания, без которого траектории не могли бы оставаться в ограниченной части пространства. Траектории проведены на упрощенном изображении аттрактора Ресслера [см. (21.3), рис. 21.12].

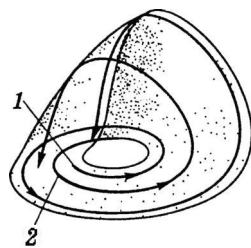


Рис. 23.9

Чтобы понять, как возникает такой поток, представим себе трехмерный поток, расходящийся в направлении xx' и сходящийся в перпендикулярном направлении yy' (рис. 23.10, а). Некоторое множество начальных условий порождает квази-

двумерный лист $ABEC$, на котором траектории расходятся, как это требуется для ЧЗУ (рис. 23.10, б). После первой операции — растяжения — необходимо убедиться в том, что поток остается в ограниченной части трехмерного пространства, т.е. в том, что происходит повторное складывание потока, порождающее характерную слоистую структуру странных аттракторов. После того как ширина листа удвоится ($CE = 2AB$), сторона CE складывается вдвое вдоль CDE (рис. 23.10, в). Затем происходит второе складывание, в результате которого CDE совмещается со входом « AB ». В результате получаем трехмерный поток, обладающий ЧЗУ в конечной части пространства.

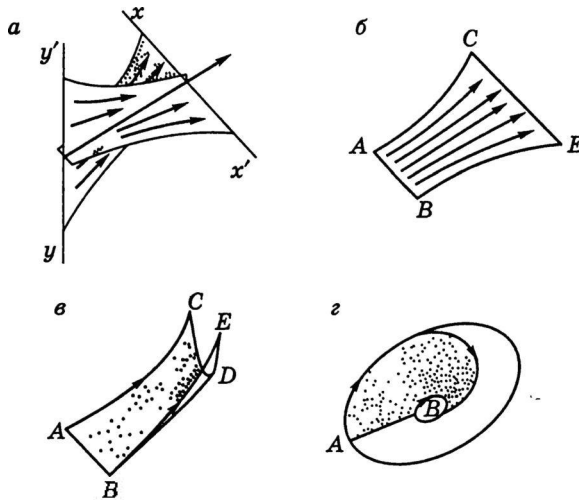


Рис. 23.10

Из рис. 23.10 видно, что в трехмерном фазовом пространстве противоречивые требования притяжения и ЧЗУ удаётся примирить с помощью понятия *гиперболичности*: притяжение происходит в одном направлении, а расхождение траекторий в другом. На рис. 23.11, а изображена плоскость, перпендикулярная среднему направлению потока. Жирными линиями изображены расходящиеся траектории, а тонкими линиями — сходящиеся траектории. Стрелка OO' указывает направление

среднего потока. Поверхность, на которой лежат сходящиеся траектории (плоскость $YY'O'O''$), называется *устойчивым многообразием*. Поверхность, на которой лежат неустойчивые траектории (плоскость $XX'O'O'$), называется *неустойчивым многообразием*. По аналогии с аналитической геометрией точка O называется *гиперболической*. Вдоль листа, т.е. в направлении xx' , траектории расходятся от точки O , а в перпендикулярном направлении yy' траектории сходятся к точке O . Вне этих двух осей точки движутся по кривым, проекции которых на плоскость (рис. 23.11, б) напоминают гиперболы. Таким образом, притяжение, уничтожающее информацию, уравновешивается расхождением траекторий, рождающих информацию.

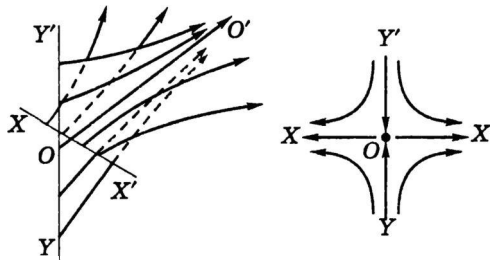


Рис. 23.11

Второй парадокс: так как ЧЗНУ требует размерности аттрактора d , удовлетворяющей неравенству $d > 2$, возникает вопрос, может ли трехмерный поток обладать ЧЗНУ. Этот вопрос возникает потому, что в случае диссипативной системы (т.е. системы, обладающей аттрактором) объемы в фазовом пространстве со временем сокращаются. Следовательно, объем аттрактора должен быть равен нулю, что в трехмерном фазовом пространстве приводит к неравенству $d < 3$. Аттрактор, который может представлять хаотический режим (и тем самым обладать ЧЗНУ), должен быть таким, чтобы выполнялось неравенство $2 < d < 3$. Казалось бы, такое условие должно исключать существование аттракторов, поскольку евклидова размерность должна быть целым числом. Однако аттракторы, удовлетворяющие неравенству $2 < d < 3$, существуют. Помимо многих

других необычных свойств, они обладают нецелой размерностью, которая называется *фрактальной размерностью*. Из-за своих необычных свойств такие аттракторы и получили название *странных*.

Резюмируя, можно утверждать, что диссипативная динамическая система может стать хаотической, если размерность фазового пространства больше или равна трем. Такой хаос (с малым числом степеней свободы) обусловлен ЧЗНУ траекторий на странном аттракторе. Наиболее важные свойства странного аттрактора состоят в следующем:

- 1) фазовые траектории (по крайней мере те, которые исходят из точек, расположенных достаточно близко к аттрактору) стремятся к аттрактору;
- 2) близкие траектории расходятся на аттракторе (ЧЗНУ);
- 3) аттрактор имеет фрактальную размерность d .

Измерение размерности странных

23.3. аттракторов

Проблемы получения количественных характеристик динамических режимов. Динамический режим можно охарактеризовать с помощью анализа Фурье. Но анализ Фурье не позволяет провести различие между хаосом с небольшим числом степеней свободы (детерминированным хаосом) и белым шумом. Под *белым шумом* понимают (в отличие от детерминированного хаоса) хаотический режим, в основе которого лежит очень большое число независимых мод или степеней свободы. В этом отношении исследование фазовых траекторий с помощью сечений Пуанкаре обладает важным преимуществом. Но получить при этом удастся только качественную информацию. Кроме того, использование сечений Пуанкаре ограничено на практике трехмерными фазовыми пространствами.

Охарактеризовать хаотический режим количественно можно, определив наибольший *показатель Ляпунова**. Интересной

* О показателе Ляпунова см. в главе 24.

характеристикой хаотического режима является фрактальная размерность аттрактора. Поскольку размерность странного аттрактора, как правило, нецелая, остановимся на этом понятии несколько подробнее.

Фрактальные размерности. Рассмотрим множество точек в p -мерном пространстве. Нужно покрыть это множество кубами (гиперкубами) с длиной ребра ε . Пусть $N(\varepsilon)$ — наименьшее число кубов, необходимых для покрытия множества (рис. 23.12). Размерность Хаусдорфа (называемая также размерностью Хаусдорфа — Безиковича) точки D определяется как предел, если он существует, отношения $\ln N(\varepsilon)/\ln(1/\varepsilon)$ при ребре ε гиперкуба, стремящемся к нулю, т.е.

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}.$$

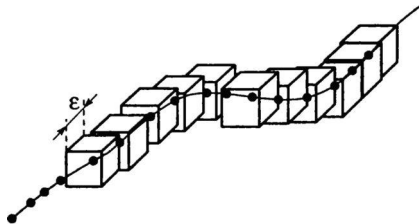


Рис. 23.12

То же самое можно сформулировать иначе: минимальное число $N(\varepsilon)$ кубов, необходимое для покрытия множества точек, зависит от ε как ε^{-D} . Если множество состоит из одной точки, то

$$N(\varepsilon) = \text{const} = 1.$$

Следовательно, размерность Хаусдорфа точки D равна нулю (евклидова размерность точки также равна нулю). Если множество представляет собой отрезок линии длиной L , то

$$N(\varepsilon) = L\varepsilon^{-1},$$

поэтому $D = 1$, в то время как для поверхности площадью S

$$N(\epsilon) = S\epsilon^{-2},$$

откуда $D = 2$.

До сих пор определение размерности Хаусдорфа ничего не добавило к определению евклидовой размерности. Обратимся теперь к канторовскому множеству, получаемому с помощью итерационного процесса. Сначала из единичного отрезка удаляется средняя треть. Затем каждый

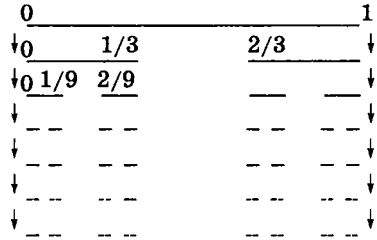


Рис. 23.13

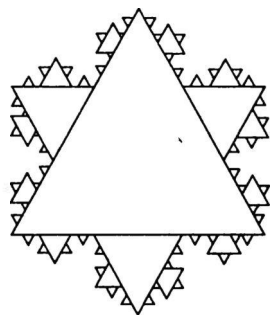
из двух оставшихся отрезков также подвергается удалению средней трети. Это повторяется до бесконечности (рис. 23.13). В результате получаем бесконечное множество несвязных точек, размерность которого заключена между нулем и единицей. Размерность Хаусдорфа канторовского множества можно получить по его построению. При $\epsilon = 1/3$ число элементов (в данном случае гиперкубы вырождаются просто в отрезки), необходимых для того, чтобы покрыть множество, равно $N(1/3) = 2$. Аналогично при $\epsilon = 1/9$ получаем $N(\epsilon) = 4$ и в общем случае при $\epsilon = (1/3)^m$ имеем $N(\epsilon) = 2^m$. По определению размерность Хаусдорфа есть величина

$$D = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^m}{\ln 3^m} \approx 0,63.$$

На этом примере видно, что размерность Хаусдорфа есть обобщение обычной геометрической размерности, позволяющее характеризовать «фрактальные» объекты.

Рассмотрим еще один классический фрактальный объект, называемый *снежинкой*. Снежинка обладает одним необычным свойством (разделяемым сечением Пуанкаре многих странных аттракторов): она имеет бесконечный периметр, хотя ограничивает конечную область плоскости. Возьмем равносторонний треугольник, разделим каждую из его сторон на три равные части и на каждой из трех центральных

третьей построим во внешнюю сторону по равносоставленному треугольнику меньших размеров (рис. 23.14). Итерируя это построение бесконечно много раз, получаем фрактальный объект, называемый иногда *кривой Коха*. Рассуждая так же, как прежде, находим, что ее размерность Хаусдорфа равна



$$D = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1,26.$$

Рис. 23.14

К сожалению, во многих других случаях, представляющих практический интерес, вычисления размерности Хаусдорфа непосредственно из ее определения как предела сходятся слишком медленно, если размерность p фазового пространства больше двух. Поэтому приходится использовать другую фрактальную размерность ν , которая может быть вычислена быстрее. Хотя ν , называемая *корреляционной размерностью*, вообще говоря, не равна в точности размерности Хаусдорфа D , она ограничивает D снизу: $\nu \leq D$.

Проиллюстрируем вышеизложенное. Рассмотрим множество точек на плоскости, представляющее, например, сечение Пуанкаре какого-то потока в R^3 , и пусть $N(r)$ — число точек этого множества, расположенных внутри окружности радиусом r (рис. 23.15, а). В случае дискретного множества

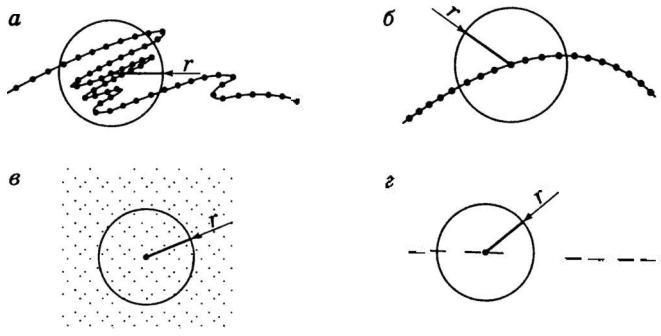


Рис. 23.15

точек, равномерно распределенных по кривой (размерность 1), получаем при достаточно малых r

$$N(r) \sim r,$$

т.е. $N(r) \sim r^\nu$ с $\nu = 1$ (рис. 23.15, б). С другой стороны, если точки равномерно распределены по поверхности (размерность 2; рис. 23.15, в), то

$$N(r) \sim r^2, \nu = 2.$$

Теперь можно рассмотреть общие объекты произвольной размерности, такие как описанное выше канторовское множество (рис. 23.15, г). Число точек $N(r)$, расположенных внутри окружности, растет в среднем медленнее, чем радиус r . Полагая $N(r) \sim r^\nu$, можно вычислить, что $\nu \approx 0,63$. Это равно вычисленной выше размерности Хаусдорфа.

Метод допускает обобщение на p -мерные пространства, если под $N(r)$ понимать число точек, содержащихся в p -мерной гиперсфере радиусом r .

Геометрическая характеристика аттрактора. В последнее время был предложен эффективный метод оценки геометрических характеристик аттрактора на основе описанного выше подхода в сочетании с возможностью восстановления траекторий в фазовом пространстве по задержкам времени.

Напомним, что исходя из одной зависящей от времени переменной $X(t)$ можно восстановить траекторию в p -мерном фазовом пространстве, выбирая в качестве координат величины $X(t), X(t+\tau), X(t+2\tau), \dots, X(t+(p-1)\tau)$, где τ — надлежащим образом выбранная временная задержка. На практике время t дискретизируется, в результате чего получается серия p -мерных векторов, представляющих фазовую диаграмму динамической системы (рис. 23.16). В этом примере использовано трехмерное пространство с координатами $X(t), X(t+\tau), X(t+2\tau)$.

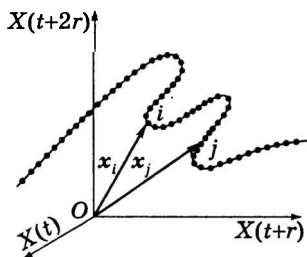


Рис. 23.16

В хаотическом режиме, соответствующем странному аттрактору, положения двух точек на одной и той же траектории, но разделенных во времени, не коррелированы вследствие ЧЗНУ. Так как все точки лежат на аттракторе, существует пространственная корреляция, которую можно попытаться охарактеризовать с помощью функции. Можно написать

$$R(r) = \lim_{m \rightarrow \infty} (1/m^2) \cdot [\text{число пар } i, j, \text{ для которых } |x_i - x_j| < r],$$

где i и j — индексы, упорядочивающие точки вдоль траектории, на которой расположено всего m точек (см. рис. 23.16). Функцию $R(r)$ можно определить более строго:

$$R(r) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m^2} \sum_{i,j=1}^m H(r - |x_i - x_j|), \quad y_{ij} = r - |x_i - x_j|,$$

где H — функция Хевисайда, равная по определению единице при положительных y_{ij} и нулю при остальных значениях x .

Число пар точек i, j , расстояние между которыми меньше r , есть вместе с тем сумма всех $N(r)$ — величин, «пересчитывающих» точки в гиперсферах с центрами в каждой точке аттрактора. Следовательно, $R(r)$ пропорциональна $N(r)$: $R(r) \sim r^v$.

Заметим, что применимость этого степенного закона ограничена значениями r , достаточно малыми по сравнению с размерностями аттрактора. С одной стороны, при увеличении r величина $N(r)$ достигает насыщения, когда r принимает значения, сравнимые с размером аттрактора, поскольку тогда учитываются m точек и, следовательно, $R(r) \rightarrow 1$. С другой стороны, при очень малых значениях r число пар точек i, j , расстояние между которыми меньше r , становится малым, поскольку число точек на аттракторе конечно. Кроме того, учитывается и инструментальная ошибка. Следовательно, на практике степенной закон $R(r) \sim r^v$ выполняется только в ограниченном диапазоне значений r и может быть использован для определений v — корреляционной размерности аттрактора.

Реализация процедуры. Исходя из дискретных значений $X(t_i)$, полученных экспериментально, восстанавливаем траекторию в p -мерном пространстве, как описано выше, при возрастающих целых значениях p :

$$p = 2, 3, 4, 5, \dots$$

При каждом значении p вычисляем $R(r)$ и определяем тангенс угла наклона касательной к графику функции f , определяемой равенством $R(r) = \log r$, достигаемым при некотором показателе v . Для периодического режима, на фазовой диаграмме которого имеем предельный цикл, зависимость $R(r)$ от r строго линейна (с точностью до эффектов, связанных с размером объекта). С совершенно иной ситуацией встречаемся в случае белого шума — функцию можно рассматривать как суперпозицию бесконечного числа независимых колебательных мод. Следовательно, такой режим может быть описан с помощью аттрактора T^n с очень большим n . Траектории плотно покрывают любое фазовое пространство размерностью $p \leq n$.

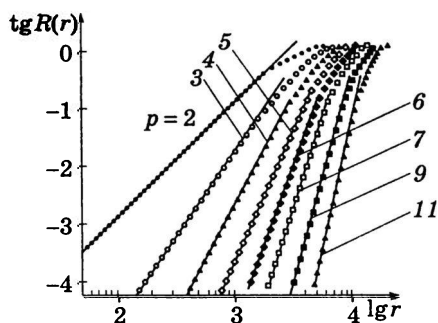


Рис. 23.17

Действительно, как показывает рис. 23.17, у корреляционных функций $R(r)$, получаемых из белого шума, тангенсы углов наклона касательных к их графикам в двойном логарифмическом масштабе продолжают возрастать с увеличением p : $v \sim p$. Этот результат допускает обобщение: если вычис-

ленное значение ν равно p (или продолжает возрастать вместе с p), то размерность пространства, используемого для вычислений, меньше размерности соответствующего аттрактора (или сравнима с ней). Но если размерность ν , вычисленная для хаотического режима, становится не зависящей от p , то хаос детерминированный и соответствующий аттрактор странный.

24

УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ, ПОКАЗАТЕЛИ ЛЯПУНОВА И КЛАССИФИКАЦИЯ АТТРАКТОРОВ

24.1 Показатель Ляпунова

Ясно, что чем быстрее расходятся траектории на аттракторе, тем труднее следить за эволюцией хаотического потока. Именно поэтому попытаемся оценить или измерить скорость разбегания траекторий. Величина, используемая как мера расходимости траекторий, называется *показателем Ляпунова* или *числом Ляпунова*.

Чтобы продемонстрировать важность этой величины, рассмотрим поведение траектории вблизи решения $\varphi(t)$ потока:

$$\frac{d\varphi}{dt} = F(\varphi). \quad (24.1)$$

Без ограничения общности будем рассматривать трехмерный поток $\varphi(t) = (X(t), Y(t), Z(t))$ и воспользуемся в качестве примера моделью Лоренца. Линеаризуя поток относительно $\varphi(t)$, получаем уравнение, описывающее эволюцию разности, которую обозначим через $\delta\varphi(t)$:

$$\frac{d\varphi}{dt} \delta\varphi = \left. \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right|_{\varphi(t)} \delta\varphi, \quad (24.2)$$

где $\partial F / \partial \varphi$ — матрица, которая зависит как от потока, так и от рассматриваемого частного решения.

Для решения $X(t), Y(t), Z(t)$ модели Лоренца имеем

$$\left. \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right|_{\varphi(t)} = \begin{vmatrix} -Pr & Pr & 0 \\ -Z(t)+1 & -1 & -X \\ Y(t) & X(t) & -b \end{vmatrix}.$$

Проинтегрировать уравнение (24.2) аналитически, за исключением особых частных случаев, невозможно. Однако его всегда можно проинтегрировать численно и найти матрицу $L(t)$, такую, что

$$\delta\varphi(t) = L(t) \delta\varphi(0),$$

где $\delta\varphi(t)$ — решение уравнения (24.2), соответствующее начальному смещению $\delta\varphi(0)$.

В силу предыдущего соотношения $L(0) = 1$. Для m -мерного потока матрица L имеет размеры $m \times m$ и m собственных значений.

Это очень напоминает теорию Флоке линейной устойчивости периодической траектории. В основе вычислений — линейный анализ поведения в окрестности траектории. Но если в теории Флоке нас интересует только то, что происходит через один период T при движении по замкнутой орбите, то в данном случае это ограничение снимается. Если собственные значения матрицы Флоке дают информацию о линейной устойчивости предельного цикла, то собственные значения матрицы L дают информацию об эволюции в окрестности траектории, которая отнюдь не обязательно должна замыкаться на себя.

Уравнение (24.2) легко интегрируется аналитически, если производная $\partial F/\partial\varphi$ не зависит от времени t и ее собственные значения — числа (возможно, комплексные) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Таким образом приходим к матрице $L(t)$, которая диагонально в системе координат, образованной ее собственными векторами, записывается так:

$$L(t) = \begin{vmatrix} \Lambda_1 & & 0 \\ & \Lambda_2 & \\ 0 & & \Lambda_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} \end{vmatrix}.$$

Пусть L^+ — матрица, эрмитово-сопряженная с матрицей L . След произведения L^+L

$$\text{Tr}(L^+(t)L(t)) = e^{(\lambda_2 + \lambda_1^*)t} + e^{(\lambda_2 + \lambda_2^*)t} + e^{(\lambda_3 + \lambda_3^*)t}.$$

При возрастании t показатель с наибольшей вещественной частью λ в конце концов подавляет два остальных члена, поэтому

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \ln [\text{Tr}(L^+(t) L(t))].$$

Это выражение позволяет найти наибольшую вещественную часть λ , не прибегая к обычным методам определения собственных значений, что весьма важно с практической точки зрения, поскольку λ определяет долговременное поведение системы. Попробуем обобщить полученное выражение на не столь частные ситуации.

В большинстве случаев матрица $\partial F/\partial \varphi$ зависит от времени и матрица $L(t)$ не представима в таком простом виде. Для этого существуют две причины: во-первых, собственные значения матрицы $\partial F/\partial \varphi$ не постоянны и, во-вторых, матрица L не диагонализуема в фиксированной системе отсчета. Однако можно определить величину

$$\lambda_{\{\varphi\}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \ln [\text{Tr}(L^+(t) L(t))],$$

поскольку так называемые мультипликативные эргодические теоремы гарантируют существование этого предела. Этот предел называется *показателем Ляпунова* (или *числом Ляпунова*), соответствующим решению $\varphi(t)$. Он выражает то, что при больших временах разность $\delta\varphi$ возрастает или убывает в среднем экспоненциально в зависимости от того, положительная или отрицательная величина $\lambda_{\{\varphi\}}$.

24.2. Анализ частных случаев

Так как матрица $\partial F/\partial \varphi$ (и, следовательно, L) диагонализуема в фиксированной системе координат, сосредоточим внимание на трех случаях.

Первый случай. Если $\partial F/\partial \varphi$ имеет постоянные собственные значения, то собственные значения матрицы $L(t)$ имеют вид $e^{\lambda_i t}$,

где λ_i не зависят от t при любых i , поэтому $\lambda_{\{\varphi\}}$ действительно является наибольшей вещественной частью собственных значений λ_i .

Второй случай. Рассмотрим матрицу $\partial F/\partial \varphi$, соответствующую умножению на скаляр α , который стохастически флуктуирует во времени (эффект «мультипликативного шума»). Так как

$$\delta\dot{\varphi}(t) = \alpha(t)\delta\varphi(t),$$

получаем

$$\delta\varphi(t) = \exp\left[\int_0^t dt' \alpha(t')\right] \delta\varphi(0).$$

Матрица $L(t)$ вырождается в скаляр:

$$\ln L(t) = \int_0^t dt' \alpha(t').$$

Рассмотрим среднее значение этой величины:

$$\langle \ln L(t) \rangle = \int_0^t dt' \langle \alpha(t') \rangle.$$

Если статистический ансамбль, по которому вычисляется среднее, стационарен (не зависит от времени), то эргодическая теорема позволяет заменить $\alpha(t')$ средним $\langle \alpha \rangle$ по не зависящему от времени ансамблю:

$$\langle \ln L(t) \rangle = \langle \alpha(t) \rangle,$$

поэтому

$$\lambda_{\{\varphi\}} = \langle \alpha \rangle.$$

Более подробные вычисления показывают, что если $\alpha(t)$ не имеет «памяти», то при больших временах

$$(\ln L(t))^2 = \langle \alpha \rangle^2 t^2 + ct,$$

где коэффициент c зависит от двойной корреляции $\alpha(t)$ при малых временах, т.е. от величины $\langle (\alpha(t_1) - \langle \alpha \rangle) - (\alpha(t_2) - \langle \alpha \rangle) \rangle$.

В свою очередь корреляция зависит только от разности $|t_1 - t_2|$, если α — стационарный случайный процесс. При большой разности $|t_1 - t_2|$ корреляция стремится к нулю, так как $\alpha(t_1)$ и $\alpha(t_2)$ становятся независимыми случайными величинами и $\langle(\alpha(t) - \langle\alpha\rangle)\rangle = 0$. Таким образом, при больших временах среднее $\langle\alpha(t)\rangle$ функции $L(t)$ статистически определено с точностью до флуктуации порядка $t^{-1/2}$.

Третий случай. Когда $\partial F/\partial\varphi$ и L диагонализуются в фиксированной системе отсчета, матричное уравнение (24.1) принимает вид

$$\delta\dot{X}(t) = A[\varphi(t)] \delta X,$$

$$\delta\dot{Y}(t) = B[\varphi(t)] \delta Y,$$

$$\delta\dot{Z}(t) = C[\varphi(t)] \delta Z,$$

где A , B и C — собственные значения (по предположению вещественные) матрицы $\partial F/\partial\varphi$ в фиксированной системе отсчета.

Решения известны:

$$\delta X(t) = \delta X(0) \exp \left[\int_0^t dt' A[\varphi(t')] \right],$$

$$\delta Y(t) = \delta Y(0) \exp \left[\int_0^t dt' B[\varphi(t')] \right] t,$$

$$\delta Z(t) = \delta Z(0) \exp \left[\int_0^t dt' C[\varphi(t')] \right],$$

где величина X выбрана в направлении собственного вектора с наибольшим в среднем собственным значением. Поскольку нас интересует поведение δX при больших временах, а не мгновенные значения этой случайной величины, рассмотрим величину

$$\frac{1}{t} \ln \left| \frac{\delta X(t)}{\delta X(0)} \right| = \frac{1}{t} \int_0^t dt' A[\varphi(t')].$$

Эргодическая теорема, о которой уже упоминалось, утверждает, что если $\langle A \rangle$ — среднее величины $A[\varphi]$ по множеству значений φ , то $\langle A \rangle$ есть и среднее по времени. Следовательно,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t dt' A[\varphi(t')] = \langle A \rangle,$$

поэтому

$$\langle A \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left| \frac{\delta X(t)}{\delta X(0)} \right|. \quad (24.3)$$

Так как логарифм флуктуирует гораздо слабее, среднее значение логарифма отношения $|\delta X(t)/\delta X(0)|$ имеет больший физический смысл, чем среднее значение самого отношения. Чтобы продемонстрировать это, разделим интервал, по которому проводится интегрирование, на множество интервалов длиной τ , где τ — характерная длина корреляции для $A[\varphi(t')]$. Пусть N — число таких интервалов. Тогда

$$\int_0^t dt' A[\varphi(t')] \approx \tau \sum_{i=1}^N A_i,$$

где A_i — среднее значение A по одному из малых интервалов.

Заметим, что A_i с различными индексами статистически независимы, так как длина интервалов меньше длины корреляции. Этому разложению показателя в сумму соответствует разложение экспоненты в произведение:

$$E(t) \exp \int_0^t dt' A[\varphi(t')] \approx \prod_{i=1}^N \beta_i, \quad (24.4)$$

где β_i образуют последовательность из N независимых множителей, $\beta_i = \exp(\tau A_i)$.

Предположим теперь, что β с равной вероятностью принимают значения $1/2$ и 1 . Вычислим среднее и среднеквадратичное значения $E(t)$:

$$\langle E(t) \rangle = \frac{1}{2^N} \left(\frac{1}{2} + 1 \right)^N = \left(\frac{3}{4} \right)^N,$$

$$\langle E^2(t) \rangle = \frac{1}{2^N} \left(\frac{1}{4} + 1 \right)^N = \left(\frac{5}{8} \right)^N.$$

Отношение среднего квадрата к квадрату среднего значения

$$\frac{\langle E^2(t) \rangle}{\langle E(t) \rangle^2} = \left(\frac{10}{9} \right)^N.$$

При очень больших N это отношение также становится очень большим. Следовательно, несколько очень больших значений E достаточно для того, чтобы средний квадрат $\langle E^2 \rangle$ был гораздо больше, чем квадрат среднего значения $\langle E \rangle^2$. Это означает, что распределение вероятности случайной величины E с увеличением N испытывает сильный разброс: задаваемая выражением (24.4) величина E сильно флуктуирует при больших N . Именно так и происходит: экспонента от среднего логарифма случайной величины $E(t)$ дает наиболее вероятное значение $E(t)$. Тем не менее не следует упускать из виду, что со временем отношение $|\delta X(t)/\delta X(0)|$ сильно флуктуирует относительно наиболее вероятного значения. В частности, его всегда можно умножить на коэффициент β_i , который будет уменьшать (или увеличивать) отношение в 10 раз по истечении интервала времени τ . Следовательно, если

$$\langle \ln E(t) \rangle_{t \rightarrow \infty} \approx t\lambda,$$

то нельзя заключить, что

$$\langle \ln E(t) \rangle_{t \rightarrow \infty} \approx te^{t\lambda},$$

так как отношение $\langle \ln E(t) \rangle / e^{t\lambda}$ испытывает по крайней мере конечные флуктуации и, следовательно, не стремится к постоянному пределу, как того требует последнее равенство.

Методы определения показателей

24.3. Ляпунова

Соотношение (24.3) имеет большое практическое значение, так как лежит в основе некоторых алгоритмов определения $\lambda_{(Ф)}$ по данным экспериментального измерения $\delta X(t)$. Принцип

состоит в следующем: предположим, что удалось свести непрерывную экспериментальную динамику к отображению первого возвращения $x \rightarrow f(x)$, также экспериментальному, в некотором конечномерном фазовом пространстве (на практике R^2 или R^3). От этого экспериментального отображения можно с помощью какой-нибудь численной процедуры перейти к аналитическому представлению отображения f . После того как это сделано, остается только найти число Ляпунова аттрактора, порождаемого приближенным аналитическим отображением f . Для этого воспользуемся непосредственно определением. Выберем последовательность из N итераций (x_1, x_2, \dots, x_N) и вычислим произведение матриц Якоби:

$$J_N = \prod_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_i}.$$

Так как при каждой итерации вектор флуктуации умножается (в линейном приближении) на матрицу Якоби $\partial f / \partial x|_{x_i}$, то после N итераций

$$\delta x_N = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_N} \dots \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_1} \delta x_1 = J_N \delta x_1.$$

Среднее по времени (соответствующее непрерывному времени) заменено средним по числу N итераций, и показатель Ляпунова, который требуется найти, равен

$$\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \ln [\text{Tr}(J_N + J_N)],$$

где J_N заменяет матрицу $L(t)$. Ясно, что такой метод лучше всего работает, когда f может быть сведено к отображению прямой на себя. Заметим также, что показатель λ безразмерен, в то время как рассмотренная ранее величина $\langle A \rangle$ имеет размерность частоты (обратного времени). Для перехода от $\langle A \rangle$ к λ достаточно умножить $\langle A \rangle$ на среднее время между двумя пересечениями траектории с поверхностью сечения: показатель λ есть скорость расхождения траекторий за «средний период», тогда как $\langle A \rangle$ есть скорость расхождения траекторий в единицу времени.

При численном моделировании нелинейных потоков определение наибольшего показателя Ляпунова осуществляется непосредственно. Исходя из найденного выше решения $\varphi(t)$ можно с помощью численного интегрирования уравнения (24.1) найти матрицу $L(t)$ и, используя определение, оценить $\lambda_{[\varphi]}$. Подчеркнем, что согласно эргодической теореме для этого не требуется предположения о диагонализации матрицы $\partial F/\partial \varphi$. Это было сделано для модели Ресслера с $\text{Tr} = 10$, $b = 8/3$ и параметром r , близким к порогу перемежаемости r_i . Видно, что в этом случае наибольший показатель Ляпунова возрастает как квадратный корень из $r - r_i$ (это подтверждает одно из предсказаний теории перехода через перемежаемости).

При фиксированных значениях параметров a и b ($a = b = 0,2$) варьируем третий параметр c и численно интегрируем поток. В результате получаем несколько режимов, одни из которых периодические, другие хаотические. На рис. 24.1 (графике наибольшего отличного от нуля показателя как функции параметра c) видно, что $\langle \lambda \rangle$ принимает положительные значения, а они соответствуют расхождению траекторий на аттракторе.

Однако при рассмотрении решения $\varphi(t)$, полученного экспериментально, вычисление показателя Ляпунова становится гораздо более сложной задачей из-за погрешностей в измере-

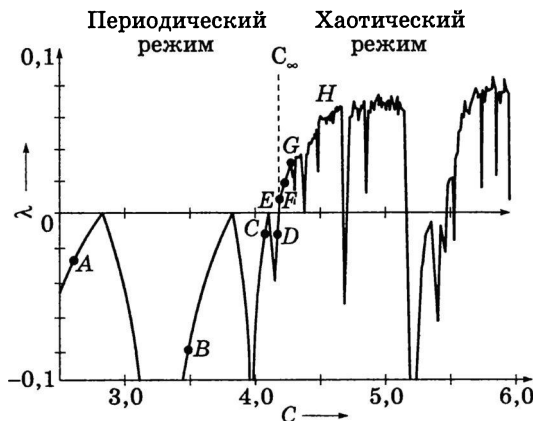


Рис. 24.1

ниях и неизбежного экспериментального шума. Если предположить, что $\varphi(t)$ флуктуирует в некотором статистическом ансамбле, то теоретически можно найти интервал времени $[t_1, t_2]$, на котором реализация (т.е. определенная последовательность значений) величины $\varphi(t)$ сколь угодно близка к опорной реализации, заданной на интервале времени $[t'_1, t'_2]$ такой же длиной. Для этого необходимо удовлетворить условию близости траекторий в начальный момент времени. Сравнив поведение системы между t_2 и t'_2 , можно прийти к заключению о различии в эволюции между соседними траекториями. Конкретная трудность такого подхода проистекает от того, что показатель Ляпунова отражает средний эффект: следовательно, для получения его статистически значимого среднего значения необходимо произвести многочисленные сравнения.

24.4. Характеристики аттрактора

Для хаотического решения $\varphi(t)$, связанного со странным аттрактором, ЧЗНУ означает существование положительного показателя Ляпунова $\lambda_{[\varphi]}$ — это прямое следствие среднего расхождения соседних траекторий. Следовательно, получение положительного показателя Ляпунова есть верный признак хаотического режима. Вычисляя по определению показатель Ляпунова периодического или квазипериодического решения, получаем $\lambda_{[\varphi]} = 0$. Если решение устойчиво, то любое смещение, «перпендикулярное» траектории, со временем убывает и, следовательно, соответствующие собственные значения матрицы L всегда меньше единицы. Однако смещение вдоль самой траектории не затухает и не усиливается; оно эквивалентно просто сдвигу начальной точки x_0 . Инвариантность такого смещения во времени выражается существованием постоянного собственного значения Λ , равного единице, которое в этом случае больше всех остальных собственных значений. Следовательно, наибольший показатель Ляпунова λ_i равен нулю.

Обобщив эти простые рассуждения, естественно идентифицировать аттракторы по знакам показателей Ляпунова λ_i .

Для трехмерного потока это приводит к результатам, представленным в табл. 24.1.

Таблица 24.1

Типы аттрактора

Тип аттрактора	Знаки показателей Ляпунова
Неподвижная точка	(-, -, -)
Предельный цикл	(0, -, -)
Тор T^2	(0, 0, -)
Странный аттрактор	(+, +, -)

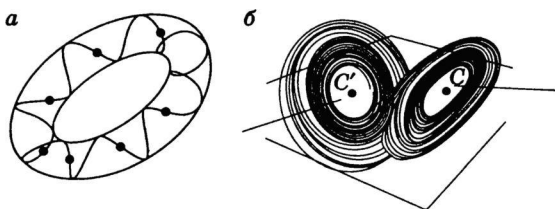


Рис. 24.2

Все перечисленные в таблице аттракторы изображены на рис. 24.2 (*a* — предельный цикл Ван-дер-Поля ($\epsilon = 0,4$); *b* — аттрактор Ресслера ($r = 28$)).



Понятие о самоорганизации

25.1. динамических систем

Нелинейные механические системы с несколькими степенями свободы, описываемые системами нелинейных дифференциальных уравнений, как правило, неинтегрируемы. Исключения составляют системы, обладающие определенными симметриями, с каждой из которых связан первый интеграл. Однако не существует общих методов, позволяющих находить первые интегралы, так же как не существует общих методов решения нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих механические системы. В этой связи, как впервые отмечал А. Пуанкаре, важное значение имеют качественные методы исследования, а, по мнению Дж. фон Неймана, широкое применение численных методов позволит развить у специалистов интуицию, что в конечном счете может привести к созданию общих методов решения нелинейных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим нелинейные системы на плоскости. Качественная теория двумерных систем уравнений вида

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2), \quad \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \quad (25.1)$$

разработана особенно полно. Поскольку функции $f_k(x_1, x_2)$, где $k = 1, 2$, не зависят от времени, то система автономная (систему называют неавтономной, если $\partial f_n / \partial t \neq 0$). Уравнения вида (25.1) возникают на промежуточных этапах решения нелинейных уравнений второго порядка вида

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}) \quad (25.2)$$

или имеют самостоятельное значение при построении математических моделей различных процессов. Например, быстрое сокращение мышечного волокна сердца, а затем быстрое возвращение к прежнему расслабленному состоянию описываются уравнениями

$$\varepsilon \dot{x}_1 = x_1 - x_1^3 - x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1 - x(0),$$

где x_1 — длина волокна; x_2 — электрохимический потенциал.

С другой стороны, полагая в (25.2) $x = x_1$, $\dot{x} = x_2$, получаем систему типа (25.1):

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = f(x_1, x_2).$$

В случае двумерной системы уравнения Гамильтона имеют вид

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad (25.3)$$

где $H = H(x, p)$ — гамильтониан системы.

Полагая $x = x_1$, $p = x_2$, получим из (25.1), (25.3) соотношение $\partial f_1 / \partial x_1 + \partial f_2 / \partial x_2 = 0$. В этом случае $H(x, p)$ — интеграл движения:

$$\dot{H} = \frac{\partial H}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial H}{\partial p} \dot{p} = 0.$$

Уравнения (25.1) можно также представить как гамильтонову подсистему в пространстве R^4 с гамильтонианом $h = p_n f_n(x)$:

$$\dot{x}_n = \frac{\partial h}{\partial p_n}, \quad \dot{p}_n = -\frac{\partial h}{\partial x_n}, \quad n = 1, 2.$$

Таким образом, система может быть записана в симметрическом виде в пространстве R^4 с использованием гамильтониана h .

В прикладных задачах важны ситуации, в которых переменные x_1 и x_2 описывают медленную и быструю подсистемы. В этом случае уравнения (25.1) имеют вид

$$\dot{x}_1 = k_{11}x_1 + F_1(x_1, x_2), \quad \dot{x}_2 = -\gamma x_2 + F_2(x_1, x_2), \quad (25.4)$$

$\gamma > 0$, $\gamma \gg |k_{11}|$. Эволюция быстрой подсистемы начинается с переходного процесса длительностью $\tau_2 \sim \gamma^{-1} \ll \tau_1 \sim |k_{11}|^{-1}$. Далее эволюция системы описывается уравнениями (25.4), в которых можно положить $\dot{x}_2 = 0$:

$$\dot{x}_1 = k_{11}x_1 + F_1(x_1, x_2), \quad 0 = -\gamma x_2 + F_2(x_1, x_2).$$

Из второго уравнения находим $x_2 = \varphi(x_1)$. Подстановка x_2 в первое уравнение позволяет существенно упростить задачу:

$$\dot{x}_1 = k_{11}x_1 + F_1(x_1, \varphi(x_1)).$$

Описанный метод, основанный на выделении характерных временных масштабов, называют *адиабатическим исключением переменной* x_2 . Этот метод впервые предложен Г. Хакеном. Таким образом, поведение системы определяется эволюцией медленной подсистемы. Медленная подсистема управляет быстрой. Именно поэтому переменную x_1 называют *параметром порядка*.

В многомерных системах можно выделить небольшое число медленных переменных, к которым подстраиваются все остальные. Более того, во многих случаях удастся получить решения вида $x_n(t) = F(t, \psi(\xi_n))$, $\xi_n = n/at$, где $n = 1, \dots, s$. Такие решения получили название *автомодельных* или *самоподобных*. Для эволюции системы характерны процессы «забывания» начальных условий и формирования структур, определяемых функциями $\psi(\xi_n)$. Простые структуры объединяются в различные типы сложных структур, которым можно поставить в соответствие собственные векторы нелинейной системы уравнений. Такие решения не могут существовать в окрестности состояния равновесия, поскольку диссипативный процесс, связанный с рассеянием энергии, уничтожает всякую упорядоченность. Новые когерентные структуры возникают в состояниях, далеких от равновесия в открытых системах, и стабилизируются в результате обмена энергией с внешней средой. Таким образом, неравновесность может быть источником упорядоченности, или самоорганизации. Такую упорядоченность бельгийский ученый И. Пригожин назвал *диссипативной структурой*. В 70-е гг. было установлено, что явления

самоорганизации широко распространены в механике, химии, биологии, физике. Процессы, приводящие к образованию структур, встречаются также и в других областях науки: экологии, социологии, экономике и т.д. Г. Хакен предложил назвать теорию самоорганизации *синергетикой* (дословно — теорией совместного действия).

25.2 Автоколебания

Этот термин, введенный в 1928 г. А.А. Андроновым, обозначает незатухающие колебания нелинейной диссипативной системы, в которой потери энергии компенсируются постоянным притоком энергии от внешнего источника. В отличие от собственных и вынужденных колебаний амплитуда автоколебаний определяется параметрами самой системы. В стационарном режиме фазовый портрет автоколебаний представляет предельный цикл.

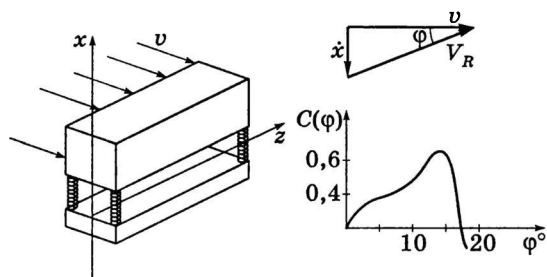


Рис. 25.1

В простейших автоколебательных системах участвуют три компонента: колебательная система, механизм обратной связи, регулирующий поток энергии от источника энергии, и существенно нелинейный ограничитель амплитуды колебаний.

Рассмотрим призму квадратного сечения, обдуваемую потоком воздуха со скоростью V (рис. 25.1). Призма, опирающаяся на пружины и соединенная с амортизатором, может переме-

паться только в вертикальном направлении под прямым углом к ветру. При скорости ветра относительно призмы V_R возникает вертикальная составляющая силы $F_x = (l/2)\rho v^2 SC(\varphi)$, где ρ — плотность воздуха; S — площадь фронтальной поверхности. На основании графика экспериментальной зависимости $C(\varphi)$ ($\operatorname{tg}\varphi = \dot{x}/V$) можно представить F_x в виде степенного ряда:

$$F_x = \frac{\rho V^2}{2} \left[C \frac{\dot{x}}{V} - C_3 \left(\frac{\dot{x}}{V} \right)^3 + C_5 \left(\frac{\dot{x}}{V} \right)^5 - C_7 \left(\frac{\dot{x}}{V} \right)^7 + \dots \right].$$

Пусть χ — жесткость пружин, $F_x^{\text{TP}} = -r\dot{x}$ — сила, действующая на призму со стороны амортизатора. Представим уравнение движения точки призмы $m\ddot{x} + \chi x = -r\dot{x} + F_x$ в виде

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = g \left[\left(1 - \frac{V_0}{V} \right) \frac{\dot{x}}{V} - \frac{C_3}{C} \left(\frac{\dot{x}}{V} \right)^3 + \frac{C_5}{C} \left(\frac{\dot{x}}{V} \right)^5 - \frac{C_7}{C} \left(\frac{\dot{x}}{V} \right)^7 + \dots \right], \quad (25.5)$$

$$\text{где } \omega_0^2 = \frac{\chi}{m}, \quad g = \frac{\rho V^2 SC}{2m}, \quad V_0 = \frac{2r}{\rho SC}.$$

В линейном приближении начальное возмущение будет затухать при $V < V_0$. При $V > V_0$ положение равновесия $x = 0$ становится неустойчивым, $x(t)$ экспоненциально растет. Однако влияние нелинейных членов в (25.5) приводит к появлению предельного цикла с конечной амплитудой. В первом приближении положим $x = a \cos \psi$, $\psi = \omega_0 t + \alpha$, $\dot{\alpha} = 0$, тогда

$$\dot{a} = \frac{ga}{2V} \left[\left(1 - \frac{V_0}{V} \right) - \frac{3C_3}{4C} \left(\frac{\omega_0 a}{V} \right) + \frac{5C_5}{8C} \left(\frac{\omega_0 a}{V} \right)^4 - \frac{35C_7}{64C} \left(\frac{\omega_0 a}{V} \right)^6 + \dots \right].$$

Амплитуда автоколебаний определяется стационарным решением $\dot{a} = 0$:

$$\left(1 - \frac{V_0}{V} \right) = \frac{3C_3}{4C} \left(\frac{\omega_0 a}{V} \right)^2 - \frac{5C_5}{8C} \left(\frac{\omega_0 a}{V} \right)^4 + \frac{35C_7}{64C} \left(\frac{\omega_0 a}{V} \right)^6 - \dots \quad (25.6)$$

Из (25.6) следует, что при $V \gg V_0$ левая часть стремится к единице. Поэтому функция $a(V)$ имеет асимптоту $a(V) = \operatorname{const} V$, проходящую через начало координат (см. рис. 21.6).

Значению $a = 0$ соответствует неустойчивое состояние, поскольку $\partial \dot{a} / \partial a > 0$ при $a = 0$. Пусть $C_5 = C_7 = \dots = 0$, исследуем вначале область, в которой наклон $C(\varphi)$ убывает:

$$a^2(V) = \frac{4C}{3C_3\omega_0^2} V(V - V_0).$$

Для анализа устойчивости этого решения линеаризуем уравнение (25.6):

$$a = a(V) + z, \\ \dot{z} = \frac{\partial \dot{a}}{\partial a} z, \quad \frac{\partial \dot{a}}{\partial a} = -\frac{g}{V^2} (V - V_0).$$

Следовательно, при $V > V_0$ возникает бифуркация Хопфа с устойчивым предельным циклом. Из рис. 25.2 видно, что в области $1 < V/V_0 < 2$ существуют три предельных цикла. Оценив знак производной $\partial \dot{a} / \partial a$, можно заключить, что один из них — неустойчивый предельный цикл — лежит в области, ограниченной двумя устойчивыми предельными циклами. На рис. 25.2 устойчивые циклы обозначены непрерывной кривой, неустойчивые — штриховой кривой. Гистерезис проявляется в скачке амплитуды при медленном изменении скорости ветра.

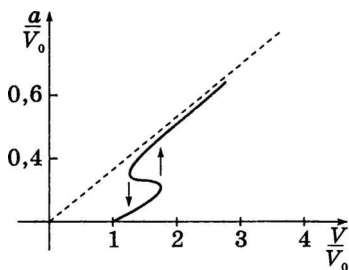


Рис. 25.2

Рассмотренная неустойчивость называется *галопированием по одной моде*. Механизм аэроупругой неустойчивости — вихревой резонанс — обусловлен периодическим отрывом вихрей

от упругой конструкции при обтекании ветром постоянного напора. Наиболее впечатляющий пример — автоколебания подвесного моста Такома в США, который из-за аэроупругих вибраций разрушился в 1940 г. всего лишь через четыре месяца после окончания строительства.

Маятник с отрицательным

25.3. трением

В качестве еще одного примера автоколебательной системы рассмотрим физический маятник, состоящий из диска A , стержня CO и муфты B , насаженной на вал, вращающийся в некотором фиксированном направлении (рис. 25.3). Некоторые свойства движения такого маятника были рассмотрены Н.Е. Жуковским. Автоколебательные свойства движения маятника, насаженного, как было указано, на вал, вращающийся в определенном направлении, выявил С.П. Стрелков.

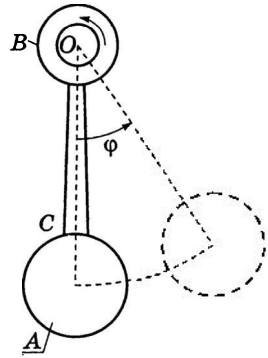


Рис. 25.3

Рассмотрим малые колебания маятника AB . Примем, что, кроме силы тяжести, на маятник действуют сопротивление среды, линейно зависящее от угловой скорости маятника $\dot{\phi}$, а также момент сил трения между муфтой и валом.

Предположим, что угловая скорость Ω вала, на который насажена муфта B , положительная и по абсолютному значению всегда превышает угловую скорость маятника $\dot{\phi}$. Пусть момент сил трения между муфтой и валом

$$M_B = - \frac{\dot{\phi} - \Omega}{|\dot{\phi} - \Omega|} f(|\dot{\phi} - \Omega|), \quad (25.7)$$

где $f(|\dot{\phi} - \Omega|)$ — знакпостоянная положительная функция.

В формуле (25.7) принято во внимание изменение направления момента сил трения между муфтой и валом при изменении знака относительной угловой скорости маятника $\dot{\phi} - \Omega$. При малых колебаниях физического маятника с угловой скоростью вала Ω относительная угловая скорость $\dot{\phi} - \Omega$ для всех моментов времени сохраняет отрицательный знак, а момент сил трения M_B всегда имеет положительный знак. Следовательно, при движении маятника в положительную сторону момент M_B увеличивает кинетическую энергию маятника, а при движении в отрицательном направлении — уменьшает. Кинетическая энергия маятника за полный период колебания получает положительное приращение лишь тогда, когда на некотором интервале изменения своего аргумента функция $f(|\dot{\phi} - \Omega|)$ уменьшается.

Предположим, что график функции $f(z)$, где $z = |\dot{\phi} - \Omega|$, имеет вид, указанный на рис. 25.4. Следовательно, между z_1 и z_2 функция $f(z)$ уменьшается, а дальше — возрастает. Предположим, что точка M , соответствующая $z = |\Omega|$, лежит на спадающей части графика функции $f(z)$. Как уже указывалось, при движении

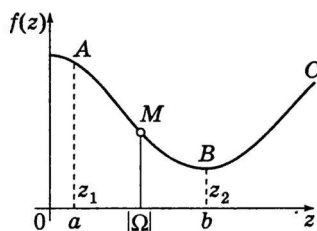


Рис. 25.4

маятника в положительном направлении момент сил трения увеличивает его кинетическую энергию, а при движении в отрицательном — уменьшает. Но при движении в отрицательном направлении относительная скорость маятника по абсолютной величине будет больше, чем при движении маятника в положительном направлении. Следовательно, момент сил трения M_B (см. рис. 25.3) при движении маятника в отрицательном направлении будет меньшим по абсолютному значению, чем при движении маятника в положительном направлении, когда выполняется неравенство

$$z_1 \leq |\dot{\phi} - \Omega| \leq z_2. \quad (25.8)$$

Дифференциальное уравнение малых колебаний физического маятника при наличии момента сил трения в муфте M_B имеет вид

$$J_0 \ddot{\phi} + 2h\dot{\phi} + mgd\phi = - \frac{\dot{\phi} - \Omega}{|\dot{\phi} - \Omega|} f(|\dot{\phi} - \Omega|). \quad (25.9)$$

Уравнение (25.9) является некоторым обобщением уравнения малых колебаний физического маятника в консервативном поле силы веса. Уравнение малых колебаний маятника можно вывести из уравнения колебаний физического маятника, положив $\sin \varphi \equiv \phi$.

Чтобы получить уравнение (25.9), необходимо ввести в левую часть уравнения колебаний физического маятника член $\frac{2h}{J_0} \dot{\phi}$, соответствующий действию сил сопротивления среды, в которой происходят колебания, пропорциональные угловой скорости $\dot{\phi}$.

В правую часть уравнения (25.9) войдет отношение момента сил трения между муфтой и валом к моменту инерции маятника (M_B/J_0).

При больших значениях отношения $|\Omega/\dot{\phi}|$ знак относительной угловой скорости $\dot{\phi} - \Omega$ маятника всегда отрицательный. Следовательно,

$$\frac{\dot{\phi} - \Omega}{|\dot{\phi} - \Omega|} = -1$$

для произвольного момента времени.

Далее предполагается, что $\Omega = \text{const}$. Выявим сначала свойство самовозбуждения колебаний в системе, движение которой определено уравнением (25.9). Разложив функцию $f(|\dot{\phi} - \Omega|)$ в ряд по возрастающим степеням $\dot{\phi}$, найдем

$$f(|\dot{\phi} - \Omega|) = f(|\Omega|) + \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{\phi}} \right)_{\dot{\phi}=0} \dot{\phi} + \dots = f(|\Omega|) + 2c\dot{\phi} + \dots$$

Здесь

$$2c = \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{\varphi}} \right)_{\dot{\varphi}=0} = \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)_{\dot{\varphi}=0} \left(\frac{\partial z}{\partial \dot{\varphi}} \right)_{\dot{\varphi}=0}.$$

Из формулы (25.7) найдем

$$\left(\frac{\partial z}{\partial \dot{\varphi}} \right)_{\dot{\varphi}=0} = -1 \quad (\text{рис. 25.5}).$$

Если угловая скорость вала выбрана так, что в точке M (см. рис. 25.4)

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)_{\dot{\varphi}=0} < 0,$$

то $c > 0$.

Следовательно, дифференциальное уравнение движения маятника имеет следующий вид:

$$J_0 \ddot{\varphi} + 2(h-c)\dot{\varphi} + mgd\varphi = f(|\Omega|) + \dots \quad (25.10)$$

Из уравнения (25.10) видно, что в первом приближении трение между муфтой маятника и валом можно считать отрицательным. Если $h < c$, отклонение маятника от положения устойчивого равновесия возрастает, т.е. возникает самовозбуждение колебаний. Но при возрастании отклонений маятника от положения равновесия неравенство (25.8) начнет нарушаться. Интервал изменения аргумента z охватит не только спадающую часть графика функции $f(z)$ (см. рис. 25.4), но и возрастающую, на которой производная $\frac{\partial f}{\partial z}$ положительная.

На соответствующей части траектории маятника коэффициент c будет отрицательным, и трение между муфтой маятника и валом будет тормозить движение маятника. Следовательно, начнется дополнительное рассеяние энергии, приводящее к установлению стационарной амплитуды автоколебаний при $t \rightarrow \infty$.

Все сказанное позволяет еще раз подчеркнуть неполноту заключений, полученных на основании интегрирования при-

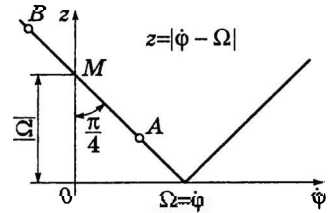


Рис. 25.5

ближенных линейных дифференциальных уравнений движения. Действительно, теория линейных колебаний, примененная к исследованию движения маятника с отрицательным трением, позволяет найти *условие самовозбуждения колебаний*, выражаемое неравенством

$$h - c < 0, \quad (25.11)$$

но исследовать изменение амплитуды колебаний, приводящее к стационарным автоколебаниям, эта теория не позволяет.

Предположим, что $\Omega > |\dot{\phi}|$.

Определим тогда функцию $f(z)$ разложением

$$f(z) \equiv f(|\dot{\phi} - \Omega|) = a_0 - 2a_1(\Omega - \dot{\phi}) + a_2(\Omega - \dot{\phi})^2 + a_3(\Omega - \dot{\phi})^3 + \dots$$

Коэффициенты разложения (25.12) должны удовлетворять некоторым дополнительным условиям, обеспечивающим наличие минимума $f(z)$ при $z = z_2$, положительный знак $f(z)$ на достаточно большом интервале изменения z и такую скорость возрастания $f(z)$ на части BC ее графика, которая обеспечивает наличие стационарной амплитуды автоколебаний (см. рис. 25.4). Еще раз подчеркнем, что наличие автоколебаний существенно зависит от свойств функции $f(z)$, интерпретируемых ее графиком (см. рис. 25.4).

Ограничимся далее рассмотрением того случая, когда функция $f(z)$ аппроксимируется полиномом третьей степени. Возвращаясь вновь к дифференциальному уравнению малых колебаний маятника, находим

$$\begin{aligned} J_0 \ddot{\phi} + 2h\dot{\phi} + mgd\phi = \\ = a_0 - 2a_1(\Omega - \dot{\phi}) + a_2(\Omega - \dot{\phi})^2 + a_3(\Omega - \dot{\phi})^3 + \dots \end{aligned} \quad (25.12)$$

или

$$\ddot{\phi} + 2H\dot{\phi} + n\phi = A_0 + A_2\dot{\phi}^2 + A_3\dot{\phi}^3 + \dots \quad (25.13)$$

Здесь

$$H = \frac{h - a_1 + a_2\Omega + \frac{3}{2}a_3\Omega^2 + \dots}{J_0}, \quad n^2 = \frac{mgd}{J_0},$$

$$A_0 = a_0 - a_1\Omega + a_2\Omega^2 + a_3\Omega^3 + \dots,$$

$$A_2 = a_2 + 3a_3\Omega + \dots,$$

$$A_3 = -a_3 + \dots$$

Условие самовозбуждения колебаний (25.11) приобретает вид

$$a_1 > h + a_2\Omega + \frac{3}{2}a_3\Omega^2 + \dots$$

Положим теперь

$$\varphi = \psi + \frac{A_0}{n_2}.$$

Тогда уравнение (25.13) запишется так:

$$\ddot{\psi} + 2H\dot{\psi} + n^2\psi = A_2\dot{\psi}^2 + A_3\dot{\psi}^3 + \dots, \quad (25.14)$$

или

$$\ddot{\psi} + n^2\psi = -2H\dot{\psi} + A_2\dot{\psi}^2 + A_3\dot{\psi}^3 + \dots \quad (25.15)$$

Заметим, что подстановка

$$\psi = ue^{-Ht},$$

где u — амплитуда, позволяет избавиться в уравнении (25.14) от линейного члена с первой производной от ψ по времени.

Действительно,

$$\dot{\psi} = e^{-Ht}(-Hu + \dot{u}), \quad \ddot{\psi} = e^{-Ht}(H^2u - 2H\dot{u} + \ddot{u}).$$

После подстановки этого уравнения в уравнение (25.14) найдем

$$\begin{aligned} \ddot{u} + (n^2 - H^2)u &= \\ &= A_2e^{-Ht}(\dot{u} - Hu)^2 + A_3e^{-2Ht}(\dot{u} - Hu)^3 + \dots \end{aligned} \quad (25.16)$$

Правая часть этого уравнения зависит от интенсивности силы трения между муфтой маятника и валом.

Уравнения (25.15) и (25.16) принадлежат к дифференциальным уравнениям второго порядка, имеющим следующий вид:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right),$$

где ε — некоторый параметр, который в ряде случаев можно полагать малым, постоянная величина.

25.4. Осциллятор Ван-дер-Поля

Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma \frac{d\theta}{dt} + \omega^2\theta = 0. \quad (25.17)$$

Как известно, при $\gamma > 0$ его решение описывает затухающие колебания, при $\gamma < 0$ (отрицательное трение) амплитуда маятника неограниченно растет без притока энергии, что не имеет физического смысла.

Ван-дер-Поль ввел переменный коэффициент $\gamma = \gamma(\theta)$, чтобы ограничить рост энергии при $\gamma < 0$ и компенсировать потери энергии на вязкое затухание при $\gamma > 0$, положив

$$\gamma(\theta) = -\gamma_0 \left[1 - \frac{\theta^2}{\theta_0^2} \right], \quad (25.18)$$

где $\gamma_0 > 0$; θ_0 — исходная амплитуда.

Тогда

$$\gamma < 0 \text{ при } \theta^2 < \theta_0^2,$$

$$\gamma > 0 \text{ при } \theta^2 > \theta_0^2.$$

Подставляя выражение (25.18) в уравнение (25.17), получаем уравнение Ван-дер-Поля:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} - \gamma_0 \left[1 - \frac{\theta^2}{\theta_0^2} \right] \frac{d\theta}{dt} + \omega^2\theta = 0.$$

Данное уравнение описывает поведение осциллятора с вынуждающей силой, в котором колебания с малой амплитудой усиливаются, а колебания с большой амплитудой затухают. Следует привести это уравнение к безразмерному виду, выбрав $\theta_0\sqrt{\omega/\gamma_0}$ за единицу амплитуды и $1/\omega$ за единицу времени. Исходное уравнение Ван-дер-Поля переходит в уравнение

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} - (\varepsilon - \theta^2) \frac{d\theta}{dt} + \theta = 0, \quad (25.19)$$

содержащее только безразмерный параметр $\varepsilon = \gamma_0/\omega$.

Фазовый портрет осциллятора Ван-дер-Поля. Если параметр ε положительный, то траектории в окрестности начала координат расходятся как спирали. Действительно, в этой окрестности угол θ всегда мал, и членом θ^2 можно пренебречь. Таким образом, имеет место ситуация при $\gamma < 0$. Наоборот, вдали от начала координат траектории стремятся к началу координат, так как коэффициент затухания $\gamma(\theta)$ на достаточно большом расстоянии от начала координат положительный. Исходя из интуитивных соображений можно предположить, что между этими двумя крайностями должна существовать замкнутая траектория. Более тщательное исследование уравнения Ван-дер-Поля позволяет установить существование, единственность и устойчивость такой замкнутой траектории, которую Пуанкаре назвал *предельным циклом*. Все фазовые траектории, расположенные как внутри, так и вне предельного цикла, асимптотически стремятся к нему.



Рис. 25.6

На рис. 25.6 изображен фазовый портрет уравнения Ван-дер-Поля. Одно из решений этого уравнения представлено на фазовой плоскости $(\theta, \dot{\theta})$ замкнутой кривой — предельным циклом, к которому сходятся все траектории. На плоскости выбраны

две начальные точки: одна (M_0) вне, а другая (M'_0) внутри предельного цикла при $\varepsilon = 0,4$.

Форма предельного цикла и колебаний, как видно из рис. 25.7, сильно зависит от значения положительного параметра ε . На рисунке изображены решения уравнения (25.19), исходящие из заданной начальной точки (начального условия) в системах координат $(\theta, \dot{\theta})$ и (θ, t) . Рассмотрены два значения ε : одно очень малое (рис. 25.7, а), другое гораздо больше (рис. 25.7, б). В первом случае предельный цикл имеет форму окружности и колебания квазисинусоидальные. Во втором случае эволюция происходит в двух различных масштабах; вслед за медленным дрейфом происходит резкая вариация амплитуды. Такая характерная временная зависимость получила название *релаксационных колебаний*.

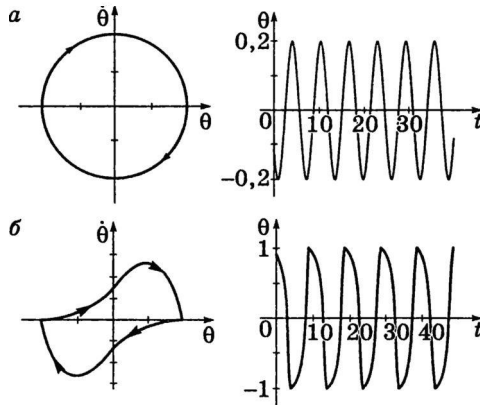


Рис. 25.7

Режим предельного цикла описывается периодической функцией $\theta(t)$, которая может быть разложена в ряд Фурье. Это очень общее свойство всех динамических систем с режимами такого типа. Следовательно, когда возникает режим предельного цикла, временная зависимость любой наблюдаемой $X(t)$ имеет вид

$$X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \sin(n\omega t + \varphi_n).$$

Зависимость предельного цикла осциллятора Ван-дер-Поля от параметра ε . В выбранных единицах энергия определяется выражением

$$E(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}(\theta^2 + \dot{\theta}^2).$$

Закон ее изменения во времени может быть выведен из уравнения (25.19)

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}(2\ddot{\theta}\dot{\theta} + 2\theta\dot{\theta}) = (\varepsilon - \theta^2).$$

Средняя энергия определяется выражением

$$\frac{dE}{dt} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t_0 + \tau} \frac{dE}{dt} dt,$$

$$\frac{dE}{dt} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} [E(t_0 + \tau) - E(t_0)] = 0.$$

Таким образом, выделяемая энергия $\varepsilon\theta^2$ в среднем точно компенсируется диссипацией $\theta^2\dot{\theta}^2$ из-за нелинейности. Вычислим теперь приближенно амплитуду предельного цикла при $\varepsilon = 0_+$. В этом случае можно предположить, что $\theta(t) \approx \rho \sin t$ (см. рис. 25.7, а). Тогда

$$\dot{\theta}^2 \approx \frac{1}{2}\rho^2,$$

$$\theta^2\dot{\theta}^2 \approx \frac{1}{8}\rho^4.$$

Приведенный выше баланс средней энергии показывает, что в этой области $\rho \approx 2\sqrt{\varepsilon}$.

Таким образом, размер ρ предельного цикла (почти окружности) изменяется как квадратный корень из параметра ε . Этот результат установлен в частном случае для уравнения Ван-дер-Поля, но область его применимости гораздо шире. Действительно, член с θ^2 можно рассматривать как представляющий любую нелинейность при малых θ . Это стандартная

форма первого нелинейного члена разложения в ряд Тейлора произвольной функции.

Заметим, что зависимость размеров предельного цикла от $\sqrt{\varepsilon}$ и амплитуды соответствующих колебаний формально может быть исключена. Принимая за единицу амплитуды θ_0 (вместо $\theta_0/\sqrt{\varepsilon}$), получаем вместо уравнения (25.19) новое уравнение

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} - \varepsilon(1 - \theta^2) \frac{d\theta}{dt} + \theta = 0.$$

Разумеется, по виду оно в точности эквивалентно уравнению (25.19) при заданном значении ε . Однако, повторяя приведенные выше вычисления, приходим к выводу о том, что размер предельного цикла на плоскости $(\theta, \dot{\theta})$ теперь не зависит от ε . Определенная выше зависимость от $\sqrt{\varepsilon}$ полностью маскируется выбором единицы измерения угла θ .

25.5. Осциллятор с односторонним трением

В качестве еще одного примера динамической системы второго порядка рассмотрим механический осциллятор, на который действует сила трения $R(V)$ (рис. 25.8): V — скорость ленты. Уравнение движения в динамической форме имеет вид

$$m \frac{dV}{dt} = R(V) - m\omega_0^2 q,$$

где ω_0 — собственная частота; q — отклонение от положения покоя.

Из опыта известно, что нелинейные механические системы с диссипативными силами при определенных условиях обладают свойством самопроизвольно возбуждаться и начинать колебательное движение. Примером являются колебания скрипичной струны при прикосновении смычка, скрип

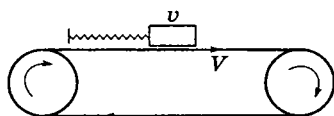


Рис. 25.8

мела по классной доске, возникновение звука при протирании винного бокала, флаттер крыльев самолета и т.п. Все эти явления с физической точки зрения представляют собой весьма сложные нелинейные эффекты.

В качестве предельно упрощенной модели, например возбуждения колебаний струны смычком, рассмотрим линейный осциллятор, на который действует направленная всегда в одну сторону сила трения со стороны бесконечной ленты, движущейся с постоянной скоростью V (см. рис. 25.8). Считая трение сухим трением скольжения, зависящим от относительной скорости осциллятора и ленты $V - v$, получим следующее выражение для силы трения:

$$R(V) \begin{cases} R_0, & \text{при } (V - v) > 0, \\ -R_0, & \text{при } (V - v) < 0. \end{cases}$$

Более точная формула учитывает трение о воздух pV , а также уменьшение силы трения с увеличением относительной скорости:

$$R(v) = -pv \pm \left(\frac{R_0 - R_1}{1 + \lambda |V - v|} \right) + R_1 \begin{cases} \text{при } V > v, \\ \text{при } V < v, \end{cases}$$

где R_1 — сила трения при бесконечно большой относительной скорости; λ — положительная константа.

В стационарном состоянии системы $v = 0$, $dv/dt = 0$ и для равновесного положения q_0 имеем уравнения

$$0 = -m\omega_0^2 q_0 + R(0),$$

$$q_0 = \frac{R(0)}{m\omega_0^2}.$$

Вводя обозначение для отклонения от стационарного положения

$$x = q - q_0,$$

получаем систему

$$\frac{dx}{dt} = v; \quad \frac{dv}{dt} = -\omega_0^2 x + D(v). \quad (25.20)$$

Возникающее за счет диссипативных сил ускорение осциллятора равно

$$D(v) = \frac{1}{m} R(v) - \omega_0^2 q_0 = \frac{1}{m} [R(v) - R(0)].$$

Ускорение за счет трения равно нулю при $v = 0$, иначе говоря, $D(0) = 0$.

Для случая, когда существует лишь сухое трение, т.е. $\rho = 0$, зависимость ускорения $D_0(v)$ от скорости представлена на рис. 25.9. Видно, что знак ускорения за счет сухого трения в области $v < V$ всегда совпадает со знаком скорости v , т.е. движение при постоянно действующей силе трения, направленной всегда в одну сторону $V \neq 0$, ускоряется, в то время как в «нормальной» физической ситуации трение замедляет движение. Поэтому мы говорим здесь о «положительном» трении и соответственно в переносном смысле об отрицательном сопротивлении и считаем, что такое не совсем обычное положение вещей и является физической причиной возникновения автоколебаний.

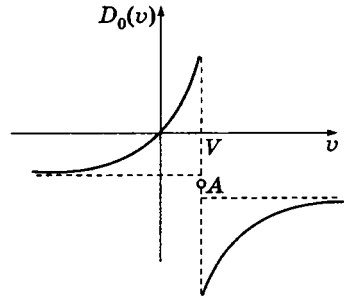


Рис. 25.9

Теперь нужно исследовать устойчивость стационарного состояния, которая в соответствии с условием $D(0) = 0$ задается равенствами

$$x^{(0)} = 0, \quad v^{(0)} = 0.$$

Малые отклонения от стационарного состояния удовлетворяют линеаризованным уравнениям

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = -\omega_0^2 x + \varepsilon v.$$

Исключая v , получаем эквивалентное дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} - \varepsilon \dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Решением этой системы для $|\varepsilon| < 2\omega_0$ является функция

$$x(t) = A \exp\left(\frac{\varepsilon}{2}t\right) \cos\left[\omega_0 t \sqrt{1 - \left(\frac{\varepsilon}{2\omega_0}\right)^2} + \delta\right]. \quad (25.21)$$

Устойчивость стационарного состояния зависит от знака параметра ε . Находим

$$\varepsilon = \frac{1}{m} R'(0) = -\frac{\rho}{m} + \frac{\lambda(R_0 - R_1)}{m(1 + \lambda V)^2} \quad \text{для } v < V.$$

Для случая $\varepsilon < 0$, например при значительном воздушном трении и трении в пружине, в системе происходят затухающие колебания, т.е. отклонение уменьшается и стационарное состояние устойчиво. Напротив, при $\varepsilon > 0$, при сильном трении, наблюдаются усиливающиеся автоколебания. Этот процесс, однако, начинается, когда фрикционная связь с лентой превысит критическое значение:

$$(R_0 - R_1)_{\text{кр}} = \frac{\rho}{\lambda} (1 + \lambda V)^2.$$

На рис. 25.10 изображена *граница устойчивости*. Справа от параболы находится устойчивая область затухающих колебаний, а слева — неустойчивая область автоколебаний. В неустойчивой области значений параметра любое малое отклонение от стационарных значений $x = 0$ и $v = 0$ имеет тенденцию к дальнейшему возрастанию, и в конце концов возникает выраженная периодическая временная структура.



Рис. 25.10

Энергия автоколебаний поступает за счет силы трения. Часть энергии рассеивается, т.е. переходит в тепло; остальная энергия преобразуется в потенциальную или кинетическую энергию колебаний. Превышение притока энергии над его стационарным значением записываем в виде

$$v[R(v) - R(0)] = mvD(v).$$

Знак этой величины соответствует направлению потока энергии. Назовем областью притока энергии ту область фазовой плоскости, где

$$mvD(v) > 0, \quad (25.22)$$

консервативной областью — область, где

$$mvD(v) = 0,$$

и, наконец, областью потери энергии — область, где

$$mvD(v) < 0.$$

Механическая энергия осциллятора пополняется только в области (25.22). Из рис. 25.9 видно, что неравенство (25.22) может выполняться только в области $v < V$. В области $v > V$ осциллятор непрерывно теряет энергию. Поэтому возникновение стабильных стационарных колебаний и соответствующий предельный цикл должны наблюдаться в области $v \leq V$.

В терминах *теории регулирования* процесс самовозбуждения можно описать следующим образом:

1. Источник энергии (двигатель, приводящий в движение ленту) непрерывно доставляет энергию к осциллятору.

2. Преобразователь энергии (фрикционная связь ленты с осциллятором) обеспечивает преобразование энергии в энергию колебаний.

3. Положительная обратная связь по сигналу (определенное изменение координат и скорости dx и dv) усиливает действие входного сигнала (увеличение скорости приводит к увеличению ускорения благодаря наличию фрикционной связи).

Источник энергии и преобразователь энергии образуют усилительную систему, которую в соответствии с теорией

систем следует рассматривать как *активную систему*. Обратная связь, напротив, является пассивной системой, которая служит исключительно для передачи сигнала с нужной амплитудой и фазой с выхода на вход усилителя. Представление об усилителе с обратной связью, принятое в теории систем, применимо и к рассмотренному механическому осциллятору. Самовозбуждающийся осциллятор нужно рассматривать как систему с положительной обратной связью.

Важным является то обстоятельство, что положительная обратная связь может осуществляться через некоторые диссипативные процессы. Этот факт носит общий характер.

После этих общих замечаний вернемся к математическому рассмотрению нашей конкретной модели.

Как видно из выражения (25.21), точка $x = 0, v = 0$ представляет собой для сверхкритического случая ($\varepsilon > 0$) неустойчивый фокус. Фазовые траектории имеют вид раскручивающихся спиралей (рис. 25.11). Амплитуда колебаний все более и более нарастает и движение становится резко нелинейным.

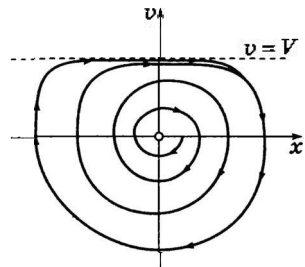


Рис. 25.11

Решение нелинейного уравнения (25.20) можно найти численным методом. Оказывается, что при определенной амплитуде возникает стационарное состояние, которое соответствует предельному циклу фазовой траектории (см. рис. 25.11). Окончательный вывод заключается в том, что в системе, представляющей собой осциллятор, на который действует направленная в одну сторону сила трения, могут возникать периодические временные структуры, если сила трения превышает некоторое критическое значение, иными словами, если отклонение от равновесия велико. Здесь наблюдается (временная периодическая) диссипативная структура.

Тенденция к образованию диссипативных структур в том случае, когда тот параметр системы, который управляет диссипацией энергии, превышает критические значения, наблю-

дается у целого ряда нелинейных механических систем. Грюневальд в серии работ экспериментально и теоретически исследовал движение частиц под действием периодических полей электрических и механических четырехполюсников. Он показал, что в том случае, когда параметр системы лежит ниже критического значения, частица локализована в центре поля четырехполюсника, тогда как при превышении критического значения возникает очень интересная звездообразная траектория (рис. 25.12).



Рис. 25.12

Превышение критического значения диссипации энергии ведет и здесь к образованию диссипативных структур с иным характером симметрии. Теория этих неавтономных систем приводит к нелинейным дифференциальным уравнениям, решение которых дает результаты, хорошо согласующиеся с траекториями, наблюдаемыми на опыте.

Литература

Арнольд В.И. Математические методы классической механики / В.И. Арнольд. М., 1974.

Бать М.И. Теоретическая механика в примерах и задачах. В 3 т. / М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон. М., 1973.

Берже П. Порядок в хаосе / П. Берже, И. Помо, К. Видаль. М., 1991.

Бутенин Н.В. Курс теоретической механики. В 2 т. / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. М., 1970.

Кильчевский П.А. Курс теоретической механики. В 2 т. / П.А. Кильчевский. М., 1977.

Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике / И.В. Мещерский. М., 1981.

Никитин Н.Н. Курс теоретической механики / Н.Н. Никитин. М., 1990.

Павленко Ю.Г. Лекции по теоретической механике / Ю.Г. Павленко. М., 1991.

Рабинович М.М. Введение в теорию колебаний и волн / М.М. Рабинович, Д.И. Трубецкой. М.; Ижевск, 2000.

Сборник задач по теоретической механике / под. ред. К.С. Колесникова. М., 1983.

Яблонский А.А. Курс теоретической механики. В 2 ч. / А.А. Яблонский. М., 1984.

Учебное издание

Техническое образование

Чигарев Анатолий Власович

Чигарев Юрий Власович

Курс теоретической механики

Учебное пособие

Ведущий редактор	<i>С.В. Исаенко</i>
Редактор	<i>Л.А. Шичко</i>
Художник обложки	<i>С.В. Ковалевский</i>
Компьютерная верстка	<i>С.И. Лученок</i>
Корректор	<i>К.А. Степанова</i>

Подписано в печать с готовых диапозитивов 05.03.2010.
Формат 60×84 ¹/₁₆. Бумага газетная. Гарнитура Школьная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 23,33. Уч.-изд. л. 19,87.
Тираж 2500 экз. Заказ № 882

Общество с ограниченной ответственностью «Новое знание».
ЛИ № 02330/0133439 от 30.04.2004. Ул. Шаранговича, 7-2136, Минск.
Почтовый адрес: а/я 79, Минск, Республика Беларусь.
Телефон/факс: (10-375-17) 328-46-40. E-mail: nk@wnk.biz

<http://wnk.biz>

Общество с ограниченной ответственностью «ЦУПЛ».
Юридический адрес: шоссе Энтузиастов, д. 56, к. 15, 111123, Москва.
Почтовый адрес: шоссе Энтузиастов, д. 56, к. 15, 111123, Москва.
Телефон/факс: (495) 788-50-30. E-mail: office@cepl-book.net

www.cepl-book.ru

Учебно-методический центр «Профессиональный учебник».
Ул. Ирины Левченко, д. 1, 123298, Москва.
Телефон/факс: (499) 740-60-14. E-mail: obrazovanie-nauka@mail.ru

Филиал № 1 ОАО «Красная звезда».
ЛП № 02330/0494160 от 03.04.2009 г.
Ул. Советская, 80, 225409, г. Барановичи, Республика Беларусь.



Чигарев Анатолий Власович,

заведующий кафедрой «Теоретическая механика» Белорусского национального технического университета, доктор физико-математических наук, профессор.

Область научной деятельности — волновая динамика неоднородных сред и структур, прогнозирование траекторий трещин в неоднородных телах, стохастизация и самоорганизация в неоднородных средах, биомеханика двуногой ходьбы и кровеносных сосудов, микронаномеханика и инженерия.

Автор монографий «Стохастическая и регулярная динамика неоднородных сред», «Распространение волн в вязкоупругих средах» (с соавторами), «Механика контактного взаимодействия тел с круговыми границами» (в соавторстве с А.С. Кравчуком), учебного пособия «Биомеханика» (в соавторстве с Т.И. Михасевым), учебных пособий по теоретической механике; общее число публикаций — более 250.



Чигарев Юрий Власович,

заведующий кафедрой «Механика почв и гидравлика» (1987–1988) и кафедрой «Теоретическая механика и теория механизмов и машин» (1988–2002) Белорусского аграрного технического университета, с 2002 г. — профессор кафедры «Теоретическая механика и теория механизмов и машин».

Член польского общества Агрофизики (РТА). С 2002 г. — профессор Западнопоморского технологического университета (Польша).

Автор (соавтор) 167 научных работ и 10 изобретений, а также двух учебных пособий: «Теоретическая механика и математические методы» (в соавторстве с А.А. Федутой и А.В. Чигаревым), «Математические основы механики почв» (в соавторстве с П.Н. Синкевичем).

ISBN 978-985-475-380-5



9 789854 753805

ISBN 978-5-91889-001-1



9 785918 189001