

## ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА КОЛЕБАНИЙ ШТАНГИ ОПРЫСКИВАТЕЛЯ В ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ С УЧЕТОМ ИЗГИБА ЕЕ КОНСТРУКЦИИ

Ю. С. БИЗА, А. И. ГАЙДУКОВСКИЙ, Д. Н. КОЛОСКО, И. С. КРУК, Ю. В. ЧИГАРЕВ

Белорусский государственный аграрный технический университет, Минск, Республика Беларусь

В статье приведены аналитические исследования процесса колебаний жестко закрепленной на остова опрыскивателя штанги в вертикальной плоскости с учетом изгиба ее конструкции. Для заданных условий получены зависимости для определения параметров затухающих колебаний, имеющих две степени свободы.

*In article analytical researches of process of fluctuations rigidly fixed on a skeleton of a sprayer of a bar in a vertical plane in view of a bend of its design are resulted. For the set conditions dependences for definition of parameters of the fading fluctuations, having two degree of freedom are received.*

### Введение

Применение химических средств защиты растений позволяет значительно снизить затраты труда при уходе за посевами и повысить урожай культур. Однако необоснованное их применение может привести не только к увеличению себестоимости продукции, но и загрязнению окружающей среды. Наиболее распространенным методом внесения пестицидов в технологиях возделывания сельскохозяйственных культур является опрыскивание, которое осуществляется использованием штанговых опрыскивателей. В данном типе машин рабочая жидкость распределяется по ширине захвата при помощи штанги и распыляется непосредственно над обрабатываемым объектом. При этом длина штанг может достигать 24 м в прицепных и 36 м – в самоходных. Следует учитывать, что увеличение ширины захвата позволяет не только повысить производительность агрегата, но и приводит к увеличению массы несущей конструкции штанги, снижению ее надежности и возрастанию амплитуды колебаний ее краев.

При движении колеса опрыскивателя копируют неровности поверхности поля, в результате чего образуются возмущения, которые через раму передаются штанге, вызывая ее колебания. Это резко увеличивает неравномерность распределения рабочего раствора по обрабатываемой поверхности и приводит к снижению эффективности химической защиты,

повышению пестицидной нагрузки на экологию окружающей среды и вероятности накопления остаточных количеств средств химизации в продукции растениеводства. Поэтому изучение процесса колебаний штанги и разработка конструкций, обеспечивающих плавность ее хода, являются актуальными и важными для сельскохозяйственной, природоохранной и перерабатывающей отраслей.

### Основная часть

Рассмотрим штангу опрыскивателя как упругую балку, в двух точках которой сосредоточена масса колеблющихся частей (рис. 1). Тогда ее можно рассматривать как колеблющуюся систему с двумя степенями свободы. Связи считаем стационарными голономными.

Колебания системы описываются уравнениями Лагранжа 2-го рода [1, 2]:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_1} &= Q_1, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_2} &= Q_2. \end{aligned} \quad (1)$$

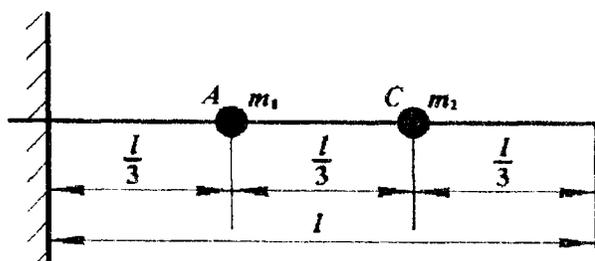


Рис. 1. Расчетная схема

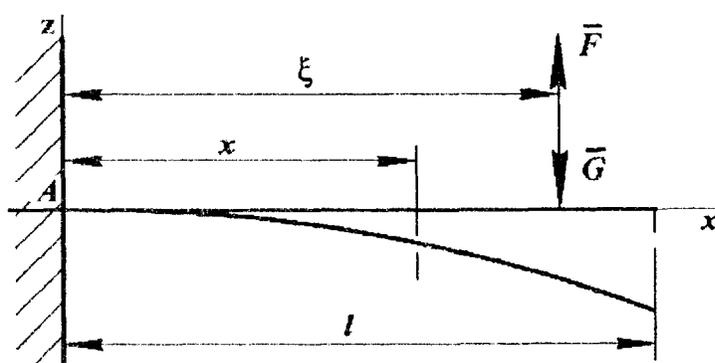


Рис. 2. Схема изгиба штанги под действием внешних сил

Каждая из обобщенных сил в общем случае состоит из трех сил: обобщенной силы от потенциальных сил  $Q_i^n$ , сил сопротивления  $Q_i^c$  и возмущающих сил  $Q_i^a$ , но последняя будет иметь кратковременный характер и может быть учтена начальными условиями. Для рассмотрения линейных колебаний около положения устойчивого равновесия необходимо получить разложения в ряды кинетической, потенциальной энергии и диссипативной функции с точностью до члена второго порядка малости. С указанной точностью кинетическая энергия выражается в следующем виде [2]:

$$E_k = \frac{1}{2} (a_{11}\dot{q}_1^2 + 2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + a_{22}\dot{q}_2^2), \quad (2)$$

где  $a_{ij}$  – коэффициенты инерции ( $i, j = 1, 2$ ).

Потенциальная энергия системы с двумя степенями свободы для стационарных силового поля и связей зависит только от обобщенных координат  $q_1$  и  $q_2$ . Тогда, пренебрегая слагаемыми третьего и более высокого порядка, потенциальную энергию выразим в следующей форме [2]:

$$E_n = \frac{1}{2} (c_{11}q_1^2 + 2c_{12}q_1q_2 + c_{22}q_2^2), \quad (3)$$

$$\text{где } c_{11} = \left( \frac{\partial^2 E_n}{\partial q_1^2} \right)_0; \quad c_{12} = \left( \frac{\partial^2 E_n}{\partial q_1 \partial q_2} \right)_0; \quad c_{22} = \left( \frac{\partial^2 E_n}{\partial q_2^2} \right)_0 -$$

обобщенные коэффициенты жесткости.

Так как в положении устойчивого равновесия потенциальная энергия имеет минимум, то коэффициенты разложения  $c_{11}$ ,  $c_{12}$ ,  $c_{22}$  как вторые производные от  $E_n$  по переменным  $q_1$  и  $q_2$  должны удовлетворять условиям:

$$c_{11} > 0; \quad c_{22} > 0; \quad c_{11}c_{22} - c_{12}^2 > 0 \text{ или } \left| \begin{matrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{matrix} \right| > 0. \quad (4)$$

Эти условия также являются условиями определенной положительности квадратичной формы для  $E_n$ .

С учетом формул для кинетической (2) и потенциальной (3) энергии имеем:

$$Q_1 = Q_1^{E_n} = -\frac{\partial E_n}{\partial q_1} = -(c_{11}q_1 + c_{12}q_2),$$

$$Q_2 = Q_2^{E_n} = -\frac{\partial E_n}{\partial q_2} = -(c_{12}q_1 + c_{22}q_2),$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_1} = a_{11}\dot{q}_1 + a_{12}\dot{q}_2,$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_2} = a_{12}\dot{q}_1 + a_{22}\dot{q}_2.$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_2} = 0, \text{ так как } E_k \text{ явно от } q_1 \text{ и } q_2 \text{ не зависит.}$$

Подставляя эти значения в уравнения Лагранжа (1), получаем линейные дифференциальные уравнения собственных колебаний системы с двумя степенями свободы без учета сопротивления

$$\left. \begin{aligned} (a_{11}\ddot{q}_1 + c_{11}q_1) + (a_{12}\ddot{q}_2 + c_{12}q_2) &= 0; \\ (a_{12}\ddot{q}_1 + c_{12}q_1) + (a_{22}\ddot{q}_2 + c_{22}q_2) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Решение системы уравнений (5) следует искать в виде  $q_1 = c_1 e^{\lambda t}$ ,  $q_2 = c_2 e^{\lambda t}$ . Нетрудно убедиться, что все значения  $\lambda$  чисто мнимые, а следовательно, частные решения уравнений (5) можно записать в виде

$$q_1 = A_1 \sin(kt + \alpha); \quad q_2 = A_2 \sin(kt + \alpha), \quad (6)$$

где  $k$  – собственная частота колебаний;

$\alpha$  – начальная фаза;

$A_1$  и  $A_2$  – амплитуда колебаний.

Тогда

$$\ddot{q}_1 = -A_1 k^2 \sin(kt + \alpha); \quad \ddot{q}_2 = -A_2 k^2 \sin(kt + \alpha). \quad (6')$$

Подставляя (6) и (6') в систему уравнений (5), получим тождества, в которых коэффициенты при  $\sin(kt + \alpha)$  должны быть равны нулю. В результате получаем систему двух однородных линейных уравнений для определения амплитуд  $A_1$  и  $A_2$ :

$$\left. \begin{aligned} A_1(c_{11} - a_{11}k^2) + A_2(c_{12} - a_{12}k^2) &= 0; \\ A_1(c_{12} - a_{12}k^2) + A_2(c_{22} - a_{22}k^2) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Чтобы система уравнений (7) позволяла для  $A_1$  и  $A_2$  получить решения, отличные от нуля, ее определитель должен быть равен нулю, или коэффициенты при  $A_1$  и  $A_2$  в уравнениях (7) должны быть пропорциональными:

$$\left| \begin{matrix} c_{11} - a_{11}k^2 & c_{12} - a_{12}k^2 \\ c_{12} - a_{12}k^2 & c_{22} - a_{22}k^2 \end{matrix} \right| = 0, \quad (8)$$

или пропорциональность коэффициентов дает

$$-\frac{c_{11} - a_{11}k^2}{c_{12} - a_{12}k^2} = -\frac{c_{12} - a_{12}k^2}{c_{22} - a_{22}k^2} = \frac{A_2}{A_1} = \mu. \quad (9)$$

Раскрывая определитель, или из пропорциональности коэффициентов получаем уравнения частот:

$$(c_{11} - a_{11}k^2) \cdot (c_{22} - a_{22}k^2) - (c_{12} - a_{12}k^2)^2 = 0. \quad (10)$$

Корни  $k_1^2$  и  $k_2^2$  этого уравнения вещественны и положительны, иначе  $k_1 = \sqrt{k_1^2}$  и  $k_2 = \sqrt{k_2^2}$  не будут вещественны и уравнения (5) не будут иметь решений вида (6), чего для системы, выведенной из положения устойчивого равновесия некоторым возмущением, быть не может.

Для системы с двумя степенями свободы это также следует из требования определенной положительности квадратичных форм для кинетической и потенциальной энергии. Меньшую из частот обозначим  $k_1$ , большую –  $k_2$ , которые являются частотами собственных колебаний системы и полностью определяются ее характеристиками (коэффициентами инерции и жесткости). Соответствующие этим частотам колебания называются главными. При этом  $k_1$  будет основной частотой, а главные колебания, соответствующие этой частоте – основными колебаниями.

Каждой из частот  $k_1$  и  $k_2$  соответствуют определенные значения амплитуд и начальных фаз:  $A_1^{(1)}$ ,  $A_2^{(1)}$ ,  $\alpha_1$  – для частоты  $k_1$  и  $A_1^{(2)}$ ,  $A_2^{(2)}$ ,  $\alpha_2$  – для частоты  $k_2$ . В соответствии с этим получим по два значения обобщенных координат  $q_1$  и  $q_2$ , ( $q_1^{(1)}$  и  $q_1^{(2)}$ ,  $q_2^{(1)}$  и  $q_2^{(2)}$ ).

Для вертикальных колебаний балки пусть первому главному колебанию соответствуют обобщенные координаты  $Z_1^{(1)}$  и  $Z_2^{(1)}$ , а второму –  $Z_1^{(2)}$ ,  $Z_2^{(2)}$ . С учетом сказанного для этих обобщенных координат  $Z_1$  и  $Z_2$  получим:

$$\begin{aligned} Z_1^{(1)} &= A_1^{(1)} \sin(k_1 t + \alpha_1); \\ Z_2^{(1)} &= A_2^{(1)} \sin(k_1 t + \alpha_1); \\ Z_1^{(2)} &= A_1^{(2)} \sin(k_2 t + \alpha_2); \\ Z_2^{(2)} &= A_2^{(2)} \sin(k_2 t + \alpha_2). \end{aligned} \quad (11)$$

Система линейных однородных уравнений (7) дает возможность определить только отношение амплитуд. Для первого ( $k_1$ ) и второго ( $k_2$ ) главных колебаний соответственно получаем:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{A_2^{(1)}}{A_1^{(1)}} = \frac{Z_2^{(1)}}{Z_1^{(1)}}; \\ \mu_2 &= \frac{A_2^{(2)}}{A_1^{(2)}} = \frac{Z_2^{(2)}}{Z_1^{(2)}}. \end{aligned} \quad (12)$$

Общее решение уравнения (5) с учетом (12) для принятых обобщенных координат  $q_1 = Z_1$  и  $q_2 = Z_2$  выразим в виде суммы частных:

$$\begin{aligned} Z_1 &= Z_1^{(1)} + Z_1^{(2)} = A_1^{(1)} \sin(k_1 t + \alpha_1) + A_1^{(2)} \sin(k_2 t + \alpha_2); \\ Z_2 &= Z_2^{(1)} + Z_2^{(2)} = \mu_1 q_1^{(1)} + \mu_2 q_1^{(2)} = \\ &= \mu_1 A_1^{(1)} \sin(k_1 t + \alpha_1) + \mu_2 A_1^{(2)} \sin(k_2 t + \alpha_2). \end{aligned} \quad (13)$$

где постоянные  $A_1^{(1)}$ ,  $A_2^{(2)}$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ , определяются из начальных условий.

Таким образом, собственные линейные колебания системы с двумя степенями свободы состоят из суммы двух главных гармонических колебаний с частотами  $k_1$  и  $k_2$ .

Если за новые обобщенные координаты системы выбрать  $Z_1^{(1)}$  и  $Z_1^{(2)}$ , называемые главными координатами системы, то главное колебание с частотой  $k_1$  будет характеризоваться только обобщенной координатой  $Z_1^{(1)}$ , а главное колебание с частотой  $k_2$  – координатой  $Z_1^{(2)}$ . Для главных координат система уравнений распадается на два отдельных независимых уравнения. В этом случае выражение кинетической и потенциальной энергии не должно содержать членов с произведениями переменных. Это требование можно положить в основу для определения главных координат другим методом. Тогда произвольные обобщенные координаты через главные в соответствии с (13) должны выражаться их линейными комбинациями, поэтому результирующее движение не является уже простым гармоническим колебанием.

Рассмотрим влияние линейного сопротивления на собственные колебания системы. Пусть в качестве обобщенных координат  $q_1$  и  $q_2$  возьмем главные координаты системы  $Z_1$  и  $Z_2$ . Тогда квадратичные формулы для кинетической и потенциальной энергии содержат только квадраты своих переменных:

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} (a_{11} \dot{Z}_1^2 + a_{22} \dot{Z}_2^2); \\ E_n &= \frac{1}{2} (c_{11} Z_1^2 + c_{22} Z_2^2), \end{aligned} \quad (14)$$

т.е.  $c_{12} = 0$  и  $a_{12} = 0$ .

В нашем случае из (2) следует:

$$E_k = \frac{1}{2} (m_{11} \dot{Z}_1^2 + m_{22} \dot{Z}_2^2)$$

т.е.  $a_{11} = m_1$  и  $a_{22} = m_2$  – инерционные коэффициенты.

Для учета сопротивления колебаниям принимаем, что на точки системы действуют линейные силы сопротивления среды, пропорциональные скорости точек  $\dot{q}_k$ , т.е.

$$\bar{F}_k = -\beta_k \dot{q}_k = -\beta_k \dot{Z}_k,$$

где  $\beta_k$  – постоянные коэффициенты сопротивления.

Тогда обобщенная сила сопротивления  $Q_1^\Phi$ , согласно определению обобщенной силы, может быть выражена в виде:

$$Q_1^\Phi = \sum \bar{F}_k \frac{\partial \bar{F}_k}{\partial Z_1} = -\sum \beta_k \dot{Z}_k \frac{\partial \dot{Z}_k}{\partial Z_1} = -\frac{\partial}{\partial Z_1} \sum \frac{\beta_k \dot{Z}_k^2}{2} = -\frac{\partial \Phi}{\partial Z_1};$$

$$Q_2^\Phi = -\frac{\partial \Phi}{\partial Z_2},$$

где  $\Phi = \sum \frac{\beta_k \dot{Z}_k^2}{2} = \sum \frac{\beta_k \dot{r}_k^2}{2}$  – диссипативная функция, характеризующая скорость убывания полной механической энергии вследствие действия линейных сил сопротивления.

Диссипативная функция по своей структуре аналогична кинетической энергии. Поэтому выполнив для  $\Phi$  разложение в ряд в окрестности положения равновесия и отбросив члены третьего и более высокого порядка, как и для кинетической энергии, получим:

$$\Phi = \frac{1}{2} (\beta_{11} \dot{Z}_1^2 + 2\beta_{12} \dot{Z}_1 \dot{Z}_2 + \beta_{22} \dot{Z}_2^2) \quad (15)$$

В диссипативной функции в общем случае сохраняется член с произведением переменных даже в случае использования главных координат.

Подставляя значение  $E_k$ ,  $E_n$  и  $\Phi$  в уравнения Лагранжа (1) только для координат  $Z_1$  и  $Z_2$ , получим систему уравнений собственных колебаний с учетом линейного сопротивления:

$$\left. \begin{aligned} (a_{11} \ddot{Z}_1 + \beta_{11} \dot{Z}_1 + c_{11} Z_1) + \beta_{12} \dot{Z}_2 &= 0; \\ \beta_{12} \dot{Z}_1 + (a_{22} \ddot{Z}_2 + \beta_{22} \dot{Z}_2 + c_{22} Z_2) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Коэффициенты системы уравнений удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned} a_{11} > 0, \quad a_{22} > 0, \quad c_{11} > 0, \quad c_{22} > 0 \\ > 0, \quad \beta_{11} > 0, \quad \beta_{22} > 0, \quad \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{vmatrix} = \\ = \beta_{11} \beta_{22} - \beta_{12}^2 > 0. \end{aligned} \quad (17)$$

В этом случае использование главных координат не приводит к распадению системы уравнений на

независимые уравнения, но делает ее несколько проще. Решение системы (16) будем искать в виде

$$\begin{aligned} Z_1 &= C_1 e^{\lambda t}; \\ Z_2 &= C_2 e^{\lambda t}. \end{aligned} \quad (18)$$

Подставляя (18) в систему уравнения (16) и сокращая  $e^{\lambda t}$ , получим:

$$\begin{aligned} C_1(a_{11}\lambda^2 + \beta_{11}\lambda + c_{11}) + C_2\beta_{12}\lambda &= 0, \\ C_1\beta_{12}\lambda + C_2(a_{22}\lambda^2 + \beta_{22}\lambda + c_{22}) &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Система линейных однородных уравнений (19) относительно неизвестных  $C_1$  и  $C_2$  имеет нулевые решения при условии, что ее определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11}\lambda^2 + \beta_{11}\lambda + c_{11} & \beta_{12}\lambda \\ \beta_{12}\lambda & a_{22}\lambda^2 + \beta_{22}\lambda + c_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получаем характеристические уравнения для  $\lambda$ , являющегося уравнением четвертой степени:

$$\begin{aligned} a_{11}a_{22}\lambda^4 + (a_{11}\beta_{22} + a_{22}\beta_{11})\lambda^3 + (a_{11}c_{22} + \\ + a_{22}c_{11} + \beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2)\lambda^2 + \\ + (\beta_{11}c_{22} + \beta_{22}c_{11})\lambda + c_{11}c_{22} = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Четырем его корням  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  соответствуют значения постоянных  $C_1$  и  $C_2$ . Из уравнений (19) можем определить не величины  $C_1$  и  $C_2$  для каждого корня  $\lambda_i$ , а только их отношения:

$$\begin{aligned} \frac{C_2^{(i)}}{C_1^{(i)}} &= -\frac{a_{11}\lambda_i^2 + \beta_{11}\lambda_i + c_{11}}{\beta_{12}\lambda_i} = \\ &= -\frac{\beta_{12}\lambda_i}{a_{22}\lambda_i^2 + \beta_{22}\lambda_i + c_{22}}. \end{aligned} \quad (21)$$

Индекс  $i = 1, 2, 3, 4$  указывается для каждого корня  $\lambda_i$ .

С учетом условия (17) возможны следующие варианты корней характеристического уравнения (20) и соответственно решений системы дифференциальных уравнений (16):

- при малом сопротивлении корни комплексные. Они попарно сопряженные, коэффициенты вещественны и имеют отрицательные вещественные части:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= -n_1 \pm k_1 i; \\ \lambda_{3,4} &= -n_2 \pm k_2 i. \end{aligned}$$

После подстановки этих значений в (18) и некоторых преобразований получаем:

$$\begin{aligned} Z_1 &= e^{-n_1 t} [B_1^{(1)} \cos k_1 t + D_1^{(1)} \sin k_1 t] + \\ &+ e^{-n_2 t} [B_1^{(2)} \cos k_2 t + D_1^{(2)} \sin k_2 t] = \\ &= A_1^{(1)} e^{-n_1 t} \sin(k_1 t + \alpha_1^{(1)}) + A_1^{(2)} e^{-n_2 t} \sin(k_2 t + \alpha_1^{(2)}); \\ Z_2 &= e^{-n_1 t} [B_2^{(1)} \cos k_1 t + D_2^{(1)} \sin k_1 t] + \\ &+ e^{-n_2 t} [B_2^{(2)} \cos k_2 t + D_2^{(2)} \sin k_2 t] = \\ &= A_2^{(1)} e^{-n_1 t} \sin(k_1 t + \alpha_2^{(1)}) + A_2^{(2)} e^{-n_2 t} \sin(k_2 t + \alpha_2^{(2)}). \end{aligned} \quad (22)$$

Таким образом, каждая из главных координат является суммой двух затухающих колебаний.

При этом четыре из восьми постоянных  $A_1^{(1)}, A_1^{(2)}, A_2^{(1)}, A_2^{(2)}, \alpha_1^{(1)}, \alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(1)}, \alpha_2^{(2)}$  определяются из начальных условий; другие четыре – через коэффициенты  $C_1^{(i)}, C_2^{(i)}$ .

- в случае больших сопротивлений колебательных движений системы наблюдаться не будет.

Для конкретного построения уравнений колебаний рассмотрим задачу об изгибе штанги под действием силы тяжести  $G$  и возмущающей силы  $F$ , приложенных на некотором расстоянии  $\xi$  от жестко закрепленного конца штанги (точка А) (рис. 2).

Дифференциальное уравнение изогнутой оси штанги в нашем случае имеет вид:

$$EJ \frac{d^2 Z}{dx^2} = M(x), \quad (23)$$

где  $E$  – модуль упругости штанги;

$J$  – момент инерции поперечного сечения;

$M(x)$  – изгибающий момент сил.

Значение изгибающего момента для сечения на расстоянии  $x$  от начала координат будет иметь вид

$$M(x) = (F - G)(\xi - x). \quad (24)$$

Тогда уравнение (23) примет вид:

$$EJ \frac{d^2 Z}{dx^2} = (F - G)(\xi - x). \quad (25)$$

Проинтегрировав уравнение (25) один раз, находим:

$$EJZ' = (F - G) \left( \xi x - \frac{x^2}{2} \right) + C_1. \quad (26)$$

Интегрируя вторично, получим:

$$EJZ = (F - G) \left( \xi \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + C_1 x + C_2. \quad (27)$$

Постоянные  $C_1$  и  $C_2$  определяются из граничных условий. При жестком креплении штанги с остовом опрыскивателя имеем:

$$x = 0; Z = 0; \frac{dZ}{dx} = Z' = 0.$$

С учетом этого, из выражений (26) и (27), установим, что  $C_1 = 0$  и  $C_2 = 0$ . Тогда из уравнения (27) получим уравнение изогнутой оси штанги:

$$Z = \frac{E - G}{EJ} \left( \frac{\xi x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right). \quad (28)$$

В дальнейшем вместо коэффициентов жесткости, которые требуют знания потенциальных сил, будем использовать коэффициенты влияния. Для них можно применять следующее определение:

$$q_j = \sum \delta_{jk} \bar{F}_k, \quad (j = 1, 2, \dots, s), \quad (29)$$

т.е. коэффициент влияния  $\delta_{jk}$  равен  $j$ -й обобщенной координате, соответствующей  $k$ -й обобщенной силе, равной единице. В нашем случае коэффициенты влияния равны  $Z_1$  и  $Z_2$  в положении равновесия, когда все обобщенные силы равны нулю, за исключением единичной обобщенной силы, соответствующей нашим обобщенным координатам.

Используем формулу (28) для определения прогибов балки единичной вертикальной силой. Силу последовательно прикладываем в точках сосредоточения массы штанги. Масса  $m_1$  – в точке  $x_1 = \frac{1}{3}l$ , масса  $m_2$  – в точке  $x_2 = \frac{2}{3}l$ . Согласно (28)  $Z_1$  соответствующей единичной силе:

$$Z_1 = \frac{Z}{F-G} = \frac{1}{EJ} \begin{pmatrix} \xi x^2 & -x^3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Для  $\xi_1 = x_1$  коэффициент влияния  $\delta_{11}$  согласно (30) равен:

$$\delta_{11} = |Z_1^{(1)}| = \frac{l^3}{81EJ}. \quad (31)$$

При  $x_1 = \frac{1}{3}l, x_2 = \frac{2}{3}l$  коэффициент влияния  $\delta_{12} = \delta_{21}$  равен:

$$\delta_{12} = |Z_2^{(2)}| = \frac{5l^3}{162EJ}. \quad (32)$$

Коэффициент влияния  $\delta_{22}$  для обобщенной координаты  $Z_2$  в случае  $x_2 = \xi = \frac{2}{3}l$  равен:

$$\delta_{22} = |Z_2^{(2)}| = \frac{8l^3}{81EJ}. \quad (33)$$

Так как внешними силами являются силы инерции  $a_{jk}\ddot{Z}_k$ , коэффициент инерции  $\alpha_{12} = 0$  и принимая во внимание (29), уравнения (1) с учетом коэффициентов влияния и равенства  $q = Z$  можно представить как:

$$Z_1 = -\delta_{11}a_{11}\ddot{Z}_1 - \delta_{12}a_{22}\ddot{Z}_2, \quad (34)$$

$$Z_2 = -\delta_{21}a_{11}\ddot{Z}_1 - \delta_{22}a_{22}\ddot{Z}_2.$$

Так как  $\alpha_{11} = m_1$ , то уравнение (34) примет вид:

$$Z_1 = -\delta_{11}m_1\ddot{Z}_1 - \delta_{12}m_2\ddot{Z}_2, \quad (35)$$

$$Z_2 = -\delta_{21}m_1\ddot{Z}_1 - \delta_{22}m_2\ddot{Z}_2.$$

Если условия (4) выполнены, решение полученных дифференциальных уравнений (35) будем искать в соответствии с (6) в виде:

$$Z_1 = A_1 \sin(kt + \alpha), \quad (36)$$

$$Z_2 = A_2 \sin(kt + \alpha).$$

Тогда отношение

$$\frac{Z_2}{Z_1} = \frac{A_2}{A_1} = \mu. \quad (37)$$

Откуда

$$A_2 = \mu A_1. \quad (38)$$

Дважды продифференцировав систему (36) с учетом (38), получим:

$$\ddot{Z}_1 = -k^2 A_1 \sin(kt + \alpha), \quad (39)$$

$$\ddot{Z}_2 = -k^2 \mu A_1 \sin(kt + \alpha).$$

Подставляя (39) в зависимость (35), получим

два линейных уравнения для определения частоты и коэффициента распределения:

$$(\delta_{11} + \mu\delta_{12})mk^2 = 1, \quad (40)$$

$$(\delta_{12} + \mu\delta_{22})mk^2 = \mu.$$

Исключая из этих зависимостей  $\mu$ , получаем уравнение частот:

$$k^4 - \frac{\delta_{11} + \delta_{22}}{m(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)}k^2 + \frac{1}{m_2(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)} = 0. \quad (41)$$

Подставляя в (41) коэффициенты влияния  $\delta_{jk}$ , полученные в (31)–(33) получим:

$$k^4 - 416,47 \frac{EJ}{ml^3} + 199,14 \frac{E^2 J^2}{m^2 l^6} = 0. \quad (42)$$

Решение биквадратного уравнения (42) дает для его корней

$$k^2 = 208,28 \frac{EJ}{ml^3} \pm 199,14 \frac{EJ}{ml^3}. \quad (43)$$

Откуда

$$k_1 = 3,02 \sqrt{\frac{EJ}{ml^3}}, \quad (44)$$

$$k_2 = 20,2 \sqrt{\frac{EJ}{ml^3}}.$$

Таким образом, частоты колебаний штанги определяются упругими свойствами материала и зависят от ее массы, длины и коэффициента инерции.

Используя предыдущие выкладки, для значений частот  $k_1$  и  $k_2$ , получим соответствующие коэффициенты распределения, характеризующие формы главных колебаний:

$$\mu_1 = \frac{1 - k_1^2 m \delta_{11}}{k_1^2 m \delta_{12}} = 3,14.$$

$$\mu_2 = \frac{1 - k_2^2 m \delta_{11}}{k_2^2 m \delta_{12}} = -0,32.$$

Влияние же линейного сопротивления на колебания штанги определяется соотношениями (15)–(25).

Влияние же линейного сопротивления на колебания штанги определяется соотношениями (15)–(25).

### Заключение

Проведены исследования процесса колебаний в вертикальной плоскости жестко закрепленной на остове опрыскивателя штанги с учетом изгиба ее конструкции. На основании предположения, что основная масса штанги сосредоточена в двух точках, рассмотрены колебания системы с двумя степенями свободы.

В результате исследований получены уравнения для анализа напряженного состояния несущей конструкции штанги, определения частот и амплитуд колебаний в зависимости от ее массы, материала и формы поперечного сечения.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воронков И.М. Курс теоретической механики. – М.: «Наука», 1966. – 594 с.
2. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики: Учеб. для вузов. – М.: Высш. шк., 1986. – 416 с.